

Das Besondere an diesem Buch

Dieses Buch behandelt die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung ähnlich wie eine Reihe anderer Bücher - vielleicht etwas ausführlicher, vielleicht mit mehr Beispielen und Aufgaben, vielleicht nicht ganz so umfassend. Im Grunde aber läßt es sich mit keinem anderen Buch vergleichen.

Es ist als Einziges in der Lage, sich Ihnen – dem Leser – anzupassen. Sie erhalten auf Wunsch das, was Sie gerade benötigen in einem eigens für Sie zusammengestellten elektronischen „Buch“ – so oft Sie wollen, bei Tag und Nacht, an jedem Ort mit Internet-Anschluß. 0/0

Natürlich wissen wir, daß es oft gar nicht so einfach ist festzustellen, welches Wissen etwa zur Lösung einer Aufgabe benötigt wird. Deshalb haben wir uns bemüht, die elektronische Version von „Analysis kompakt“ so einzurichten, daß sie den Leser bei der Auswahl interessanter und nützlicher Inhalte möglichst aktiv unterstützt.

Dazu wird versucht, mit Ihrer Hilfe zu bestimmen, was Sie bereits kennen, ohne Sie einer Prüfung zu unterziehen. So sehen Sie z. B. bei der Suche nach einem Begriff gleich, wo es etwas für Sie Neues im Buch gibt und können das für Ihr persönliches „Buch“ anfordern.

Sie können auch gezielt nach Beispielen oder Aufgaben zu einem Thema suchen oder z.B. herausfinden, wo und wie das gerade gelernte Wissen im Buch weiter verwendet wird. Oder Sie lassen sich ein Skript zusammenstellen, das Sie von Bekanntem ohne Umwege direkt zu dem Stoff führt, der Sie interessiert. Mitunter kann es auch lohnen, von einem Thema ausgehend im Buch nach verwandten Begriffen suchen zu lassen.

Für die Lehre bietet die elektronische Version ebenfalls eine Reihe von zusätzlichen Möglichkeiten. So können Overheadfolien oder Aufgabenblätter mit eigenen Titeln erzeugt werden. Dozenten können für ihre Studenten eine Vorauswahl treffen, die dann von jedem Studenten individuell angepaßt werden kann.

Trotz der stürmischen Entwicklung der elektronischen Medien hat das Buch bisher auf Grund seiner unbestreitbaren Vorzüge (man denke nur an die Übersichtlichkeit) seine dominierende Stellung im Lehrbetrieb bewahren können. So stand auch für uns bei der Gestaltung der elektronischen Version die Unterstützung der Arbeit mit dem gedruckten Buch im Vordergrund.

Deshalb entsprechen die über das Internet gelieferten Inhalte in ihrem Aussehen weitgehend den gedruckt vorliegenden Fassungen und sind auch selbst durchaus für den Ausdruck gedacht. Dort, wo die elektronische Version ihre Vorzüge hat (etwa bei der Flexibilität oder bei der Einbeziehung von Animationen), haben wir versucht, dies im Interesse unserer Leser zu nutzen. Wir hoffen, so zu einer Symbiose von Buch und neuen Medien beigetragen zu haben.

Dabei ist es für uns keineswegs klar, wie sich dieses Verhältnis der Medien zueinander

künftig entwickeln wird. Insofern sind wir besonders interessiert zu erfahren, wie die Leser die drei Versionen unseres Buches – Papier, CD-ROM und Online – nutzen.

Wer sich mit elektronischen Lehrmaterialien bereits näher beschäftigt hat, wird bemerken, daß wir eine Reihe von Möglichkeiten nicht nutzen. So ist dies auch kein Material aus dem Bereich „Computer Based Training“. Z. B. fehlt eine Lernerfolgskontrolle und der Leser hat jederzeit Zugang zu allen Inhalten, unabhängig von seinen Kenntnissen.

Die fehlende Lernerfolgskontrolle ist von uns auf Grund der derzeitigen technischen Möglichkeiten gewollt. Ein erheblicher Teil der Übungsaufgaben des Buches fordert vom Leser das Finden eines Beweises. Die Korrektheit eines solchen Beweises, wie er üblicherweise von Studenten abgegeben wird, läßt sich derzeit nicht automatisch verifizieren. Andererseits halten wir die Beschäftigung mit solchen Aufgaben für didaktisch so wertvoll, daß wir darauf keinesfalls verzichten wollten.

Auch der freie Zugang zu allen Teilen des Buches wird von uns bewußt gefördert. Wenn der Leser dabei auf Inhalte stößt, die ihn interessieren, die er aber (noch) nicht versteht, so hoffen wir, daß dies seine Neugier weckt. Dann bieten wir ihm als Hilfe ein individuell zusammengestelltes Skript, das seine Vorkenntnisse berücksichtigt und ihm dabei hilft, das Gefundene zu verstehen.

Andererseits gibt es auch Möglichkeiten, um die wir die elektronische Version künftig gerne erweitern würden. Als erstes wäre hier die Kombination des Inhalts unseres Buches mit Inhalten aus anderen elektronischen Büchern zu nennen.

Die Qualität der Darstellung von Formeln in HTML-Seiten ist gegenwärtig noch unbefriedigend. Deshalb haben wir uns zur Ausgabe in den verbreiteten Formaten Postscript und Portable Document Format entschlossen. Entstehende Standards lassen hier in den nächsten Jahren eine Verbesserung erwarten. Dann wird es auch möglich sein, Formeln aus dem Buch direkt mit Computeralgebrasystemen oder automatischen Beweisern zu bearbeiten.

Für die technisch interessierten Leser sei erwähnt, daß die elektronische Version des Buches auf der neuen Slicing-Book-Technologie beruht, die vom zweiten Autor während seiner Tätigkeit in der Arbeitsgruppe „Künstliche Intelligenz“ der Universität Koblenz-Landau entwickelt wurde. Grundlage für die angebotenen Dienste ist eine Wissensbasis, die neben den eigentlichen Texten und Abbildungen des Buches eine Reihe von Informationen über diese Inhalte und ihre Beziehungen zueinander enthält. Die „Slicing Book Advisory Engine“ auf dem Server kombiniert diese Metainformationen mit Informationen über das Wissen und die Interessen des Lesers um die gewünschten Manuskripte zusammenzustellen.

Die Anfänge der Technologie liegen etwa 1996, als wir an der Humboldt-Universität Berlin im Rahmen des DFG-Schwerpunkts „Deduktion“ ein Projekt zur Integration logischer Funktionen betreuten. Im Rahmen dieses Projekts wurde ein Werkzeug für den Zugang zu einer umfangreichen Datenbank mathematischer Theoreme benötigt. Es zeigte sich, daß dieses Werkzeug zur personalisierten Darstellung von verschiedensten strukturierten Dokumenten geeignet ist. Zur Erprobung wurde ein Vorlesungsmanuskript des ersten Autors herangezogen, das eigentlich nicht für die Veröffentlichung in elektronischer Form gedacht war.

An der Universität Koblenz-Landau entstand dann 1998/99 parallel zur Aufbereitung und Überarbeitung des Manuskripts ein entsprechend angepaßter Prototyp sowie ein Autorenwerkzeug. Die Slicing Information Technology GmbH Berlin übernahm die weitere Entwicklung und stellt die für die Realisierung benötigte Software zur Verfügung.

Wir möchten uns bei allen herzlich bedanken, die dazu beigetragen haben, dieses Vorhaben zu verwirklichen. Unser besonderer Dank gilt Herrn Thomas Honigmann, der bei Problemen schnell und wirksam weiterhalf, dem Springer-Verlag für seine freundliche Unterstützung des Buchprojekts und nicht zuletzt den Dozenten, Studenten und Schülern, die dieses Buch getestet haben.

Die CD-ROM und der Web-Server zum Buch

Die CD-ROM, die dem Buch beiliegt enthält nicht nur den vollständigen Text der gedruckten Ausgabe, sondern darüber hinaus die Beweise der im Buch behandelten Theoreme sowie zahlreiche Übungsaufgaben. Damit ist der Text auf der CD-ROM etwa doppelt so umfangreich wie das Buch. Außerdem steht Ihnen ein Web-Server zur Verfügung, auf dem Sie sich u.a. Ihr persönliches Buch zusammenstellen können. 0/1

Um diese Möglichkeiten zu nutzen benötigen Sie den Netscape Communicator oder den Microsoft Internet-Explorer jeweils ab Version 4 sowie ein Programm zur Anzeige von Dateien im Portable Document Format pdf (z. B. Adobe Acrobat Reader) oder im Postscript-Format (z. B. eine der Varianten des Programms Ghostview). Nutzer von Microsoft Windows können den Internet Explorer Version 5 und den Adobe Acrobat Reader Version 4 mit Hilfe der Programme `\browser\ie5setup` bzw. `\Acrobat 4\RS40deu` der CD-ROM installieren.

Je nachdem ob Sie sich für das pdf- oder das Postscript-Format entschieden haben, laden Sie bitte die Datei *analysis-pdf.html* oder *analysis-ps.html* von der CD in Ihren Browser. Wenn Sie dann auf die Überschriften des Inhaltsverzeichnisses auf dieser Seite klicken, können Sie einzelne Abschnitte und Einheiten des Buches auswählen.

Ein Click auf das Symbol mit der Lupe neben der jeweiligen Überschrift zeigt den Inhalt des ausgewählten Teils an. Bei den kleinsten Einheiten des Buches werden dabei auch die Teile hinzugefügt, die zu ihrem Verständnis notwendig sind. So können Sie z.B. für Übungsaufgaben oder für Merksätze zur Prüfungsvorbereitung gleich auf das erforderliche Wissen zugreifen. Sollte es bei der Darstellung der Inhalte Probleme geben, so beachten Sie bitte die Hinweise in der Datei *readme.html* und in der Online-Hilfe auf der CD-ROM und dem Server.

Noch mehr Möglichkeiten bietet der Web-Server zum Buch. Sie erreichen ihn unter <http://www.slicing-infotech.de/slib/analysis01.html>. Auch die erwähnten Seiten auf der CD-ROM enthalten einen Link, der Sie zum Web-Server führt.

Bei der ersten Anmeldung beim Server geben Sie bitte keinen Login-Namen ein, sondern nur Ihren Zugangscode. Dieser Zugangscode liegt dem Buch bei oder Sie erhalten ihn

von Ihrem Dozenten oder Ihrer Bibliothek. Falls dieser Zugangscode von Ihrer Bibliothek erworben wurde, so müssen Sie für den Zugang auch stets einen der angemeldeten Rechner Ihrer Bibliothek oder Ihres Instituts benutzen. Die Mitarbeiter Ihrer Bibliothek oder Ihr Dozent können Ihnen sicher diese Rechner nennen.

Nach erfolgter Anmeldung können Sie Ihren eigenen Login-Namen und Ihr eigenes Paßwort wählen. Bitte geben Sie diese Informationen nicht weiter, da sonst Andere Ihre individuellen Einstellungen auf dem Server überschreiben und so z.B. Ihr persönliches Buch löschen könnten.

Auf dem Server sollten Sie als Erstes unter *Einstellungen* festlegen, ob Sie das pdf- oder Postscript-Format verwenden wollen. Vergessen Sie dabei nicht, Ihre Einstellungen an den Server abzuschicken!

Als Nächstes empfehlen wir Ihnen eine Tour durch das System, die Sie unter *Hilfe* aufrufen können. Sie lernen dabei, wie Sie Ihr persönliches Buch zusammenstellen können, wie Sie Ihren Kenntnisstand verwalten, im Text suchen, Vortragsmanuskripte, Folien oder Aufgabenblätter erzeugen können. Beachten Sie auch die Schritt-für-Schritt-Anleitungen und die Tips in der Online-Hilfe des Servers.

Wenn Sie nicht weiterkommen oder Hinweise und Anregungen haben, so können Sie über das Briefsymbol auf dem Server direkt Kontakt mit den Autoren, den Programmentwicklern und dem Verlag aufnehmen. Wir werden uns bemühen, Ihre Post so schnell wie möglich zu beantworten.

Berlin und Koblenz im Januar 2000

Helmut Wolter und Ingo Dahn

Einleitung	1
Kap. 1: Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik	3
Übungsaufgaben	12
Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 1	14
Kap. 2: Reelle Zahlen	15
2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome	16
2.2 Rechnen mit reellen Zahlen	19
2.3 Mengen von reellen Zahlen	30
Übungsaufgaben	37
Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 2	39
Kap. 3: Folgen von reellen Zahlen	41
3.1 Konvergenz von Folgen	42
3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen	55
Übungsaufgaben	60
Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 3	62
Kap. 4: Unendliche Reihen; Potenzreihen	63
4.1 Konvergenz von Reihen	63
4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen	75
4.3 Komplexe Zahlen	85
4.4 Potenzreihen	91
4.5 Rechnen mit Potenzreihen	95
Übungsaufgaben	100
Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 4	104
Kap. 5: Reelle Funktionen	105
5.1 Operationen für Funktionen	105
5.2 Stetigkeit	109
5.3 Elementare Funktionen	118
5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen	135
Übungsaufgaben	139
Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 5	142
Kap. 6: Der n-dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n; Funktionen mit mehreren Veränderlichen	143
6.1 Der Raum \mathbb{R}^n	143
6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen	152
6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen	158
6.4 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen	171
6.5 Einige wichtige Ergänzungen	173
Übungsaufgaben	177
Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 6	180

Kap 7:	Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen	181
7.1	Ableitung	181
7.2	Mittelwertsätze; der Satz von Taylor	193
7.3	Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen	201
7.4	Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen	218
	Übungsaufgaben	222
	Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 7	229
Kap 8:	Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)	231
8.1	Differenzierbarkeit	231
8.2	Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung	253
8.3	Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen	256
8.4	Implizite Funktionen	266
	Übungsaufgaben	272
	Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 8	274
Kap 9:	Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen	275
9.1	Das unbestimmte Integral	276
9.2	Das bestimmte (Riemann-) Integral	284
9.3	Integrierbarkeitskriterien	290
9.4	Einige Klassen integrierbarer Funktionen	294
9.5	Mittelwertsätze der Integralrechnung	300
9.6	Volumen von Rotationskörpern	307
9.7	Uneigentliche Integrale	312
9.8	Länge von Kurven	316
9.9	Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen	325
	Übungsaufgaben	327
	Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 9	330
Kap 10:	Ausblicke auf die Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Veränderlichen	331
10.1	Doppelintegrale	331
10.2	Dreifachintegrale	345
	Übungsaufgaben	353
	Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 10	354
Literatur	355
Sachverzeichnis	356

Einleitung

Dieses Buch enthält im wesentlichen den Inhalt der Vorlesungen Analysis I und II, die wir 0/3
mehrmals an der Humbolt-Universität in Berlin gehalten haben. Bei der Stoffauswahl fanden solche Gebiete besondere Berücksichtigung, die für Mathematik-Lehramtsstudenten von erhöhtem Interesse sind. Der Inhalt ist so gestaltet, daß er ohne zusätzliche Literaturstudien verständlich ist.

Für weiterführende Studien ist am Ende des Buches eine kleine Auswahl des insgesamt sehr umfangreichen Literaturangebots für diesen Teil der Analysis aufgelistet.

Der Abiturstoff wird natürlich als bekannt vorausgesetzt. Es liegt jedoch – aufgrund des deduktiven Aufbaus der Mathematik – in der Natur der Sache, daß gewisse Teile des Schulstoffs, wenn auch auf höherer Ebene, noch einmal behandelt und ergänzt werden.

Der Inhalt des Buches ist in Kapitel und Unterabschnitte untergliedert. Eine genaue Übersicht ist im Inhaltsverzeichnis angegeben. Der dargebotene Stoff wird durch Übungsaufgaben ergänzt. Am Ende eines jeden Kapitels sind die entsprechenden Schwerpunkte genannt, die als Leitfaden für die Wiederholung dienen können.

Die Sätze (Theoreme) werden entsprechend der Kapitel fortlaufend numeriert. Das Ende eines Beweises ist durch \square gekennzeichnet.

Neue Begriffsbildungen sind *kursiv* hervorgehoben, ein Sachregister erleichtert das Auffinden von Definitionen und Bezeichnungen.

Allgemein übliche Notationen wie z.B.: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} für die Zahlbereiche der natürlichen, der ganzen, der rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen werden ohne weitere Erklärungen benutzt. Wird nichts anderes vereinbart, dann bezeichnen m , n , k , l , i , j (eventuell mit Indizes) in der Regel natürliche Zahlen und a , b , c , d (eventuell mit Indizes) reelle Zahlen.

Der Bequemlichkeit halber werden auch eigene Abkürzungen verwendet, wie etwa:

„z.z.“ für „es ist zu zeigen“,

„g.z.z.“ für „es genügt zu zeigen“,

„o.B.d.A.“ für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

„ $\overline{\text{Df}}$ “ steht als Zeichen für eine Definition,

„:=“ ordnet einem Symbol (einer Variablen) eine Bedeutung (einen Wert) zu, und

„ $\mathcal{M}!$ “ weist darauf hin, daß ein Widerspruch erzeugt worden ist.

Behauptungen, die eine Äquivalenz darstellen, beweist man in der Regel „von links nach rechts“ und umgekehrt; (\longrightarrow) bzw. (\longleftarrow) deuten die entsprechende Beweisrichtung an.