Kapitel 1
Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik

Es werden jetzt einige wahre Aussagen betrachtet, die aufgrund ihrer logischen Struktur häufig als *Beweisprinzipien* auftreten. (In der Regel benutzt man diese Prinzipien schon rein intuitiv richtig.) **1/0/22**

$$A \wedge (A \to B) \to B \qquad (\textit{Modus ponens} \text{ oder } \textit{Abtrennungsregel})$$

Aus der Gültigkeit der Aussagen A und $A \to B$, schließt man auf die Gültigkeit der Aussage B.

Analog interpretiert man auch die folgenden Prinzipien:

$$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C) \qquad (\textit{Kettenschluß})$$
$$A \to B \;\leftrightarrow\; \neg B \to \neg A \qquad (\textit{Kontraposition})$$

Die Kontraposition besagt, daß die Aussagen $A \to B$ und $\neg B \to \neg A$ stets den gleichen Wahrheitswert besitzen. Dies darf allerdings nicht verwechselt werden mit der Umkehrung $B \to A$ der Implikation $A \to B$. Die Aussagen $A \to B$ und $B \to A$ sind im allgemeinen nicht äquivalent.

$$(\neg A \to F) \to A \qquad (\textit{indirekter Beweis};\ F \text{ steht für eine beliebige falsche Aussage})$$

Praktisch geht man beim indirekten Beweis folgendermaßen vor:
Man nimmt an, daß die Aussage A falsch ist, also die Negation $\neg A$ gilt. Dann leitet man aus dieser Annahme etwas Falsches her, d.h., man erzeugt einen *Widerspruch.* (Dies wird häufig einfach durch das Symbol ausgedrückt). Daraus schließt man, daß die Aussage $\neg A$ nicht richtig sein kann; also gilt die Aussage A. (Hierbei wird ganz wesentlich das Prinzip der Zweiwertigkeit benutzt.)