Kapitel 2
Reelle Zahlen

Es sei $\mathbb{Q}$ die geordnete Menge der rationalen Zahlen und A, B seien nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{Q}$. Das Paar (A, B) heißt *Dedekindscher Schnitt* in $\mathbb{Q}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: **2/0/1**

(1) $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$.

(2) Für jedes $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt: Wenn $x \in A$ und $y \in B$, so $x < y$.

Der Dedekindsche Schnitt (A, B) definiert eine Zerlegung von $\mathbb{Q}$ in zwei disjunkte Klassen, wobei A *Unterklasse* und B *Oberklasse* bei der Zerlegung genannt wird. Der Eindeutigkeit wegen betrachten wir nur solche Schnitte, bei denen die jeweilige Unterklasse kein größtes Element enthält. Diese reichen aus, um die reellen Zahlen zu definieren.

Für B gibt es zwei Möglichkeiten:

1. B enthält eine kleinste rationale Zahl, d.h., es existiert ein $r \in B$, so daß $r \leq x$ für jedes $x \in B$.
2. B enthält keine kleinste rationale Zahl.

Im ersten Fall legt der Dedekindsche Schnitt die *rationale Zahl* r fest, im zweiten Fall bestimmt (A, B) eine sogenannte *Lücke*. Die „Lücken“ werden als die *irrationalen Zahlen* interpretiert. Die Menge der *reellen Zahlen* wird dann als Menge aller Dedekindschen Schnitte definiert. Eine reelle Zahl ist also nach dieser Definition ein Dedekindscher Schnitt. Das eigentliche Problem besteht nun darin, in der Menge der so gegebenen reellen Zahlen eine Addition und eine Multiplikation zu definieren und eine Ordnungsrelation festzulegen. Hierzu muß aber auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.