

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

#### IV. $\mathbb{R}$ genügt dem Intervallschachtelungsaxiom:

2/1/6

Es sei  $([a_n, b_n])_{n=0,1,2,\dots}$  eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in  $\mathbb{R}$ , so daß für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Dann gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c \leq b_n$ , für jede natürliche Zahl  $n$ .

**Anschauliche Deutung des Axioms:** Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen“; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.