

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

2/3/6

(1). Es sei $a \in M$ und b eine obere Schranke von M . Wenn M überhaupt eine obere Grenze besitzt, dann muß sie schon in dem Intervall $[a, b]$ liegen. Denn ist $c < a$, dann ist c keine obere Schranke von M und damit erst recht keine obere Grenze. Ist $b < c$, dann ist c nicht die kleinste obere Schranke von M . Wir brauchen also nur in dem Intervall $[a, b]$ nach einer oberen Grenze von M zu suchen, und dies geschieht mit Hilfe einer Intervallschachtelung.

Wir konstruieren eine Intervallfolge $([a_n, b_n])$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$,
- b_n ist eine obere Schranke von M ,
- für jedes n existiert ein $x \in M$ mit $a_n \leq x$,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Wir starten mit

$$a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

Es sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Für c_1 sind zwei Fälle möglich, nämlich:

- (a) c_1 ist eine obere Schranke von M oder
- (b) c_1 ist keine obere Schranke von M . Dann existiert ein $x \in M$, so daß $c_1 < x$.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$.

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls } c_1 \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist,}$$

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0, \quad \text{falls } c_1 \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist.}$$

Damit gilt stets $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ und b_1 ist eine obere Schranke von M .

Weiterhin gibt es ein $x \in M$ mit $a_1 \leq x$, und schließlich ist $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$.

Bemerkung. Die Definition des Intervalls $[a_1, b_1]$ hätte man sich ersparen können, da $[a_1, b_1]$ als Spezialfall von $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ auftritt. Nur des besseren Verständnisses wegen ist dieser Fall hier diskutiert worden.

Seien nun (entsprechend der Induktionsvoraussetzung) a_n und b_n schon mit den geforderten Eigenschaften definiert.

Es sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Analog wie im ersten Schritt können für c_{n+1} wieder zwei Fälle eintreten:

- (a) c_{n+1} ist eine obere Schranke von M oder
- (b) c_{n+1} ist keine obere Schranke von M .

Entsprechend dieser Fälle definieren wir:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist,}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist.}$$

Man überprüft leicht, daß $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1: c ist eine obere Schranke von M .

Es ist zu zeigen: Für jedes $x \in M$ gilt: $x \leq c$.

Annahme: c ist keine obere Schranke von M .

Dann existiert ein $x \in M$ mit $c < x$. Da b_n nach Definition eine obere Schranke von M ist, gilt: $a_n \leq c < x \leq b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Es ist $\underbrace{x - c}_{:= d} > 0$, und wegen $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ erhält man $b_n - a_n < d$ für hinreichend große n .

Dies liefert einen Widerspruch.

Behauptung 2: c ist die kleinste obere Schranke (also obere Grenze) von M .

Annahme: c ist nicht die kleinste obere Schranke von M .

Dann gibt es eine kleinere obere Schranke d von M , also $d < c$, und d ist ebenfalls eine obere Schranke von M .

Nach Voraussetzung existiert für a_n ein $x \in M$, so daß $a_n \leq x$. Wegen $x \leq d$ gilt insgesamt

$$a_n \leq x \leq d < c \leq b_n.$$

Analog wie beim Beweis von Behauptung 1 erhält man einen Widerspruch.

Folglich ist c obere Grenze von M .

(2) bleibt als Übungsaufgabe.

Hinweis: Sei $M \neq \emptyset$ und M nach unten beschränkt.

Man bilde $M^- = \{-x : x \in M\}$.

g.z.z.: M ist nach unten beschränkt gdw M^- nach oben beschränkt ist, und

c ist obere Grenze von M^- gdw $-c$ untere Grenze von M ist.

Es läßt sich auch zeigen, daß die Eigenschaften (1) und (2) äquivalent sind.

(3). Zusammenfassung von (1) und (2). \square