

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Bemerkung. Wir haben gezeigt, daß unter Benutzung der Axiome I – IV der Satz von der oberen Grenze gilt. 2/3/7

Man kann auch umgekehrt unter Benutzung der Axiome I – III und des Satzes von der oberen Grenze zeigen, daß das Intervallschachtelungsaxiom gilt, d.h., unter Zugrundelegung der Axiome I – III sind das Intervallschachtelungsaxiom und der Satz von der oberen Grenze äquivalent.

Wir geben jetzt einen Beweis hierfür an.

Mit Hilfe des Intervallschachtelungsaxioms wurde bereits der Satz von der oberen Grenze bewiesen. Es bleibt noch zu zeigen, daß auch das Intervallschachtelungsaxiom aus diesem Satz folgt.

Dazu sei $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung und $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ und durch jedes b_n nach oben beschränkt. Folglich besitzt M eine obere Grenze c , und somit ist stets $a_n \leq c$.

Es bleibt zu zeigen: $c \leq b_n$ für alle n .

Angenommen, es gibt ein k , so daß $b_k < c$.

Nach den obigen Betrachtungen ist b_k eine obere Schranke von M , die kleiner als c ist. Folglich ist c nicht obere Grenze von M . $\nabla!$ \square