

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.3 Mengen von reellen Zahlen

**Satz 2.9** *Ist  $a$  ein Häufungspunkt von  $M$ , dann liegen in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  unendlich viele Elemente aus  $M$ .* 2/3/12

**Beweis.** Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $M$  und  $\varepsilon > 0$ .

2/3/13

Annahme: In  $U_\varepsilon(a)$  gibt es nur endlich viele Elemente  $b \in M$  mit  $b \neq a$ ; es seien dies  $b_1, \dots, b_n$ .

Wegen  $b_i \neq a$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist  $|b_i - a| > 0$ .

Sei  $\varepsilon' := \min\{|b_1 - a|, \dots, |b_n - a|\} > 0$ .

Nach Definition des Häufungspunktes existiert ein  $b \in M$ , so daß  $b \neq a$  und  $b \in U_{\varepsilon'}(a)$ ; also  $|b - a| < \varepsilon'$ .

Wegen  $b_i \in U_\varepsilon(a)$  ist  $|b_i - a| < \varepsilon$  und damit  $\varepsilon' \leq |b_i - a| < \varepsilon$ . Folglich ist  $U_{\varepsilon'}(a) \subseteq U_\varepsilon(a)$  und somit  $b \in U_\varepsilon(a)$ , also  $b \in \{b_1, \dots, b_n\}$ .

Sei  $b = b_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist

$$|b - a| = |b_i - a| < \varepsilon' \leq |b_i - a|. \quad \text{N!}$$

Folglich ist unsere Annahme falsch.  $\square$