

Kapitel 2 Reelle Zahlen

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Satz 2.10 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und M' die Menge aller Häufungspunkte von M . 2/3/14
Ist a ein Häufungspunkt von M' , dann ist a schon ein Häufungspunkt von M .

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von M' und $\varepsilon > 0$. 2/3/15

z.z.: In $U_\varepsilon(a)$ gibt es ein $c \in M$ mit $c \neq a$.

Da a ein Häufungspunkt von M' ist, existiert ein $b \in M$, so daß $b \neq a$ und $b \in U_\varepsilon(a)$. Folglich ist b ein Häufungspunkt von M . Dann existieren in jeder δ -Umgebung von a (mit $\delta > 0$) unendlich viele Elemente aus M . Insbesondere gibt es dann ein $c \in M$ mit $c \neq a$ und $c \in U_\delta(b)$.

Insgesamt haben wir: $b \in U_\varepsilon(a) \implies |a - b| < \varepsilon$ und

$$c \in U_\delta(b) \implies |b - c| < \delta.$$

Wir wählen speziell $\delta = \varepsilon - |a - b| > 0$, also $|a - b| + \delta = \varepsilon$. Folglich gilt

$$|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + \underbrace{|b - c|}_{< \delta} < |a - b| + \delta = \varepsilon.$$

Also $c \in U_\varepsilon(a)$, $c \neq a$ und $c \in M$. \square