

## Kapitel 2 Reelle Zahlen

### 2.3 Mengen von reellen Zahlen

**Satz 2.11** (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

2/3/16

Jede unendliche und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt (wenigstens) einen Häufungspunkt.

**Beweis.** (Beweis mit Intervallschachtelung!)

2/3/17

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $M$  unendlich und beschränkt. Dann existieren Elemente  $a, b \in \mathbb{R}$ , so daß  $a \leq x \leq b$  für jedes  $x \in M$ .

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung  $([a_n, b_n])$  mit folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ ,
- in jedem  $[a_n, b_n]$  liegen unendlich viele Elemente aus  $M$ ,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ .

Sei  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ .

Dann ist  $M \subseteq [a_0, b_0]$  und  $[a_0, b_0] \cap M$  unendlich.

Sei  $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Dann ist  $[a_0, b_0] = [a_0, c_1] \cup [c_1, b_0]$ .

Da  $[a_0, b_0]$  unendlich viele Elemente aus  $M$  enthält, muß dies auch für  $[a_0, c_1]$  oder für  $[c_1, b_0]$  gelten.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir:

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls } [a_0, c_1] \cap M \text{ unendlich ist und}$$

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0, \quad \text{anderenfalls } (\implies [c_1, b_0] \cap M \text{ unendlich}).$$

In jedem Falle ist  $[a_1, b_1] \cap M$  unendlich, und weiterhin gilt  $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$  und  $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ .

Seien  $a_n, b_n$  schon (entsprechend der Induktionsvoraussetzung) mit den geforderten Eigenschaften definiert.

Sei  $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

Da  $[a_n, b_n] = [a_n, c_{n+1}] \cup [c_{n+1}, b_n]$  und  $[a_n, b_n] \cap M$  unendlich ist, gilt:

$[a_n, c_{n+1}] \cap M$  ist unendlich oder  $[c_{n+1}, b_n] \cap M$  ist unendlich. Entsprechend dieser Fallunterscheidung definiert man:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } [a_n, c_{n+1}] \cap M \text{ unendlich ist und}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{sonst.}$$

Offensichtlich besitzt  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  die geforderten Eigenschaften.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $a_n \leq c \leq b_n$  für alle  $n$ .

Behauptung:  $c$  ist ein Häufungspunkt von  $M$ .

z.z.: Wenn  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $x \in M$  mit  $x \neq c$  und  $x \in U_\varepsilon(c)$ .

Wählt man  $n$  so groß, daß  $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) < \varepsilon$ , dann ist wegen  $a_n \leq c \leq b_n$  auch  $c - a_n, b_n - c < \varepsilon$  und damit  $c - \varepsilon < a_n, b_n < c + \varepsilon$ . Schließlich gilt:

$$[a_n, b_n] \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = U_\varepsilon(c).$$

Da  $[a_n, b_n]$  unendlich viele Elemente aus  $M$  enthält, liegen auch unendlich viele Elemente aus  $M$  in  $U_\varepsilon(c)$ . Folglich ist  $c$  ein Häufungspunkt von  $M$ .  $\square$