Kapitel 2
Reelle Zahlen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die reellen Zahlen einzuführen, wenn man die rationalen Zahlen bereits definiert hat. Die geläufigsten Verfahren verwenden Dedekindsche Schnitte oder Cauchyfolgen im Bereich der rationalen Zahlen. Die anschaulich einfachste Methode benutzt Dedekindsche Schnitte. Wir werden hier nur ganz kurz auf diese Methode eingehen. Ansonsten setzen wir voraus, daß die reellen Zahlen schon definiert sind. Wir stellen hier lediglich die Grundeigenschaften der reellen Zahlen zusammen, die auch als „Axiome" aufgefaßt werden können, und benutzen nur diese Axiome beim späteren Beweisen weiterer Eigenschaften von reellen Zahlen. **2/0/0**

Es sei $\mathbb{Q}$ die geordnete Menge der rationalen Zahlen und A, B seien nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{Q}$. Das Paar (A, B) heißt *Dedekindscher Schnitt* in $\mathbb{Q}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: **2/0/1**

(1) $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$.

(2) Für jedes $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt: Wenn $x \in A$ und $y \in B$, so $x < y$.

Der Dedekindsche Schnitt (A, B) definiert eine Zerlegung von $\mathbb{Q}$ in zwei disjunkte Klassen, wobei A *Unterklasse* und B *Oberklasse* bei der Zerlegung genannt wird. Der Eindeutigkeit wegen betrachten wir nur solche Schnitte, bei denen die jeweilige Unterklasse kein größtes Element enthält. Diese reichen aus, um die reellen Zahlen zu definieren.

Für B gibt es zwei Möglichkeiten:

1. B enthält eine kleinste rationale Zahl, d.h., es existiert ein $r \in B$, so daß $r \le x$ für jedes $x \in B$.
2. B enthält keine kleinste rationale Zahl.

Im ersten Fall legt der Dedekindsche Schnitt die *rationale Zahl* r fest, im zweiten Fall bestimmt (A, B) eine sogenannte *Lücke*. Die „Lücken" werden als die *irrationalen Zahlen* interpretiert. Die Menge der *reellen Zahlen* wird dann als Menge aller Dedekindschen Schnitte definiert. Eine reelle Zahl ist also nach dieser Definition ein Dedekindscher Schnitt. Das eigentliche Problem besteht nun darin, in der Menge der so gegebenen reellen Zahlen eine Addition und eine Multiplikation zu definieren und eine Ordnungsrelation festzulegen. Hierzu muß aber auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Es bleibt noch die Frage zu diskutieren, ob es überhaupt irrationale Zahlen gibt. Es könnte doch sein, daß für jeden Dedekindschen Schnitt die entsprechende Oberklasse ein kleinstes Element enthält. Dazu betrachten wir den Schnitt (A, B), so daß **2/0/2**

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, 0 \le x \text{ und } 2 \le x^2\}; \quad \text{und}$$
$$A = \mathbb{Q} \setminus B.$$

Angenommen, B enthält ein kleinstes Element r. Dann ist $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$ und $r^2 = 2$. (Wäre $r^2 > 2$, dann ließe sich eine rationale Zahl $r' > 0$ konstruieren mit $r' < r$ und

$2 \le r'^2 < r^2$. Damit ist r nicht kleinstes Element in B.) Folglich existieren positive ganze Zahlen m und n, so daß $r = \frac{m}{n}$. m und n seien o.B.d.A. teilerfremd. Dann gilt:

$$2 = r^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \text{und damit} \quad 2n^2 = m^2.$$

Also $2|m^2$. Da 2 eine Primzahl ist, gilt auch $2|m$. Folglich existiert eine natürliche Zahl k, so daß $m = 2k$. Damit haben wir $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ und schließlich $n^2 = 2k^2$. Also $2|n^2$ und somit $2|n$. Folglich ist 2 ein Teiler von m und n. Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß m und n teilerfremd sind. Damit bestimmt (A, B) eine Lücke, also eine irrationale Zahl.
Dies zeigt, daß $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Wir befassen uns nun mit den grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen.

2.1 Eigenschaften der reellen Zahlen – Axiome

Zunächst betrachten wir ein geeignetes *Axiomensystem der reellen Zahlen*, das in vier Gruppen unterteilt ist. Dazu sei $\mathbb{R}$ eine Menge (Menge der reellen Zahlen). In $\mathbb{R}$ sind zwei 2-stellige *Operationen* $+$ und $\cdot$ und eine 2-stellige Relation $\le$ definiert, so daß gilt: **2/1/0**

I. $\mathbb{R}$ ist ein Körper (d.h., in $\mathbb{R}$ gelten folgende 10 Eigenschaften:) **2/1/1**

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(2) $x + y = y + x$,

(3) Es existiert ein Element 0 in $\mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x + 0 = x$.

Bemerkung. Aus (2) und (3) folgt sofort, daß es genau ein solches Element 0 in $\mathbb{R}$ gibt. Denn sind $0_1, 0_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

(4) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $x + y = 0$.

Bemerkung. Aus (1) – (4) folgt, daß es für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $x+y = 0$.
Wir zeigen, daß y durch x tatsächlich eindeutig bestimmt ist.
Dazu sei x gegeben.
Angenommen, es gibt Elemente y, z, so daß $x + y = 0$ und $x + z = 0$. Dann gilt:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z.$$

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := -x$ bezeichnet.
Die Eigenschaften (1) – (4) sind die Axiome für eine (*additive*) *abelsche Gruppe*.

(5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

(6) $x \cdot y = y \cdot x$,

(7) Es existiert ein Element 1 in $\mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot 1 = x$.

Bemerkung. Analog wie bei (3) gibt es genau ein solches Element 1. Denn wären $1_1, 1_2$ Elemente mit dieser Eigenschaft, dann gilt:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

(8) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$.

Bemerkung. Analog wie zu (4) zeigt man, daß y durch x eindeutig bestimmt ist; der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Dieses durch x eindeutig bestimmte y wird mit $y := x^{-1} = \frac{1}{x}$ bezeichnet.

(9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Bemerkung. Aus den obigen Axiomen erhält man: $x \cdot 0 = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
Es ist $x = x \cdot 1 = x \cdot (1 + 0) = \underbrace{x \cdot 1}_{= x} + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$. Nach den Axiomen (2) und (3) gibt es genau ein Element 0, so daß $x = x + 0$. Da auch $x = x + x \cdot 0$ ist, muß dann $x \cdot 0$ dieses Element 0 sein.

(10) $0 \neq 1$.

II. $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper **2/1/2**

(d.h., in $\mathbb{R}$ gelten zusätzlich die folgenden 5 Eigenschaften:)

(1) Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, so $x \leq z$. (*Transitivität*)

(2) Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$, so $x = y$. (*Antisymmetrie*)

(3) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. (*Linearität*)

(4) Wenn $x \leq y$, so $x + z \leq y + z$. (*Monotonie der Addition*)

(5) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x \cdot y$.

Bemerkung. Aus (3) folgt sofort die *Reflexivität*, d.h. für jedes x gilt: $x \leq x$.
Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome der reflexiven Ordnung*.
(4) könnte auch abgeschwächt werden zu

(4′) Wenn $0 \leq x$ und $0 \leq y$, so $0 \leq x + y$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß $x \leq y \iff 0 \leq y - x$.

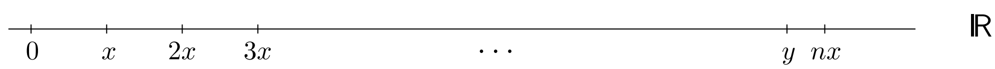
Wie üblich ist $y \geq x$ eine andere Schreibweise für $x \leq y$.

III. $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch geordneter Körper **2/1/3**

(d.h., in $\mathbb{R}$ gilt zusätzlich das *archimedische Axiom*)

Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x, y$ gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $y < n \cdot x$, (wobei $x < y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x \leq y$ und $x \neq y$).

Dies bedeutet, daß durch endlich-oft-maliges Addieren einer positiven reellen Zahl zu sich selbst schließlich jede reelle Zahl übertroffen werden kann.



Bevor das letzte Axiom für die reellen Zahlen formuliert werden kann, benötigen wir noch einige Definitionen und Bezeichnungen.

Definition. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$. **2/1/4**

$[a,b] \underset{\text{Df}}{\equiv} \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$,

$[a,b) \underset{\text{Df}}{\equiv} \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$,

$(a,b] \underset{\text{Df}}{\equiv} \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$,

$(a,b) \underset{\text{Df}}{\equiv} \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.

Bez.: $[a,b]$ heißt *abgeschlossenes Intervall* von a bis b;
$[a,b)$ und $(a,b]$ sind *halboffene Intervalle*,
und (a,b) heißt *offenes Intervall* von a bis b.

Achtung: Die Bezeichnung „(a,b)" ist doppeldeutig; sie kennzeichnet geordnete Paare und offene Intervalle. Dies wird aber nicht zu Verwechslungen führen. Die aktuelle Bedeutung ergibt sich jeweils aus dem Zusammenhang. **2/1/5**

IV. $\mathbb{R}$ genügt dem Intervallschachtelungsaxiom: **2/1/6**

Es sei $\big([a_n, b_n]\big)_{n=0,1,2,\ldots}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$, so daß für jede natürliche Zahl n gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$, für jede natürliche Zahl n.

Anschauliche Deutung des Axioms: Wie die Intervalle auch beschaffen sind, sie können sich nicht auf eine „Lücke zusammenziehen"; sie schachteln stets wenigstens eine reelle Zahl ein.

I – IV können als Axiome für die reellen Zahlen aufgefaßt werden. Nur diese Eigenschaften von reellen Zahlen werden bei späteren Beweisen wirklich benutzt.

Definiert man die reellen Zahlen (mit einer der bekannten Methoden) aus der Menge der rationalen Zahlen, dann werden die Eigenschaften I – IV natürlich beweisbare Sätze.

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen

Wir verabreden zunächst folgende Bezeichnungen: **2/2/0**

Das durch $a \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Element $-a$ heißt *invers* zu a.

Falls $a \neq 0$, dann heißt $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *reziprok* (oder invers bez. der Multiplikation) zu a.

$a - b$ und $\frac{a}{b}$ dienen als Abkürzungen für $a + (-b)$ bzw. für $a \cdot \frac{1}{b}$.

Daraus ergibt sich sofort: $0 - b = 0 + (-b) = (-b) + 0 = -b$.

Satz 2.1 *Für alle* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *gilt:* **2/2/1**

(1) $-(-a) = a, \quad -0 = 0, \quad (-1) \cdot a = -a.$

(2) $\dfrac{a}{1} = a.$

(3) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a,$ *falls* $a \neq 0.$

(4) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc,$ *falls* $b,\, d \neq 0.$

Beweis. (1). Nach Eigenschaft I(4) ist $(-a) + (-(-a)) = 0$. Weiterhin gilt $a + (-a) = 0 = (-a) + a$. Folglich sind $-(-a)$ und a inverse Elemente von $-a$. Da das Inverse eines Elements eindeutig bestimmt ist, muß $-(-a) = a$ sein. **2/2/2**

Es ist stets $a + 0 = a$, speziell auch für $a = -0$. Folglich gilt nach I(2)

$$-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0, \text{ also } -0 = 0.$$

Weiterhin ist $a + (-a) = 0$ und $a = a \cdot 1$. Dann gilt

$$a + (-1) \cdot a = a \cdot 1 + (-1) \cdot a = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot (\underbrace{1 + (-1)}_{=0}) = a \cdot 0 = 0.$$

Folglich ist $(-1) \cdot a$ invers zu a. Andererseits ist auch $-a$ invers zu a. Da das inverse Element von a eindeutig bestimmt ist, gilt $(-1) \cdot a = -a$.

Die Behauptungen (2) – (4) bleiben als Übungsaufgaben. ❏

Satz 2.2 *Für alle reellen Zahlen* a, b, c *gilt:* **2/2/3**

(0) $0 < 1.$

(1) *nicht* $(a < a).$ (*Irreflexivität*)

(2) *Wenn* $a < b$ *und* $b < c$, *so* $a < c$. (*Transitivität*)

(3) *Für jedes* a, b *gilt:* $a < b$ *oder* $a = b$ *oder* $b < a$. (*Konnexität*)

Bemerkung. Die Eigenschaften (1) – (3) sind die *Axiome für die irreflexive Ordnung.*

(3′) *Es gilt genau eine der drei Beziehungen:* $a < b,\ a = b,\ b < a$. (*Trichotomie*)

(4) *Wenn* $a < b$, *so* $a + c < b + c$. (*Monotonie der Addition*)

(5) *Wenn* $a < b$ *und* $c > 0$, *so* $a \cdot c < b \cdot c$,
Wenn $a < b$ *und* $c < 0$, *so* $a \cdot c > b \cdot c$.

(6) *Wenn* $a \leq b$ *und* $c \leq d$, *so* $a + c \leq b + d$.
Ist zusätzlich $a < b$ *oder* $c < d$, *so ist* $a + c < b + d$.

(7) *Es gilt:* $a < b \iff -b < -a$.

(8) *Wenn* $0 < a$ *und* $0 < b$, *so* $0 < a \cdot b$,
Wenn $0 < a$ *und* $b < 0$, *so* $a \cdot b < 0$,
Wenn $a < 0$ *und* $b < 0$, *so* $0 < a \cdot b$.

(9) *Wenn* $0 < a$, *so* $0 < \dfrac{1}{a}$,

Wenn $a < 0$, *so* $\dfrac{1}{a} < 0$.

(10) *Wenn* $0 < a < b$, *so* $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$,

Wenn $a < 0 < b$, *so* $\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}$,

Wenn $a < b < 0$, *so* $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$.

(11) *Wenn* $0 < a$, *dann gibt es natürliche Zahlen* m *und* n, *so daß* $0 < a < m$ *und* $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

(12) *Wenn* $a < b$, *so* $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

Beweis. Wir beweisen hier nicht alle diese Eigenschaften, sondern greifen uns nur einige als Beispiele heraus. Die verbleibenden Behauptungen werden durch ähnliche Überlegungen gezeigt. Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß $a < b \iff a \leq b$ und $a \neq b$. **2/2/4**

(0). I(10) besagt: $0 \neq 1$; II(3) liefert $0 \leq 1$ oder $1 \leq 0$.

Wäre $1 \leq 0$, so erhielte man aus II(4): $\underbrace{1 + (-1)}_{=0} \leq 0 + (-1) = -1$.

Folglich wäre $0 \leq -1$. Aus II(5) erhält man dann (mit Hilfe von Satz 2.1) $0 \leq (-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$.

Also $1 \leq 0$ und $0 \leq 1$. Aus II(3) folgt dann $0 = 1$. $\lightning$! (zu I(10))

(1). (Beweis indirekt.)

Angenommen, es gibt ein a mit $a < a$.

Nach Definition gilt: $a < a \iff a \leq a \wedge a \neq a$. Da $a \neq a$ stets falsch ist, ist auch die Konjunktion $a \leq a \wedge a \neq a$ und damit auch $a < a$ stets falsch. $\lightning$!

(5). Teil 1: Sei $a < b$ und $0 < c$.

Man hat zu zeigen, daß $a \cdot c < b \cdot c$.

Es genügt zu zeigen: $a \cdot c \leq b \cdot c$ und $a \cdot c \neq b \cdot c$.
Es gilt $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$ und $0 < c \iff 0 \leq c \wedge 0 \neq c$.
Aus $a \leq b$ folgt: $0 = a + (-a) \leq b + (-a) = b - a$, also $0 \leq b - a$.
Wegen $0 \leq c$ gilt dann: $0 \leq (b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c$ und somit nach II(4)

$$a \cdot c \leq (b \cdot c - a \cdot c) + a \cdot c = b \cdot c + 0 = b \cdot c.$$

Es bleibt noch zu zeigen: $a \cdot c \neq b \cdot c$.

Annahme, $a \cdot c = b \cdot c$.

Wegen $c \neq 0$ existiert $\dfrac{1}{c}$, folglich ist

$$a = a \cdot 1 = a \cdot \Big(c \cdot \frac{1}{c}\Big) = (a \cdot c) \cdot \frac{1}{c} = (b \cdot c) \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \Big(c \cdot \frac{1}{c}\Big) = b \cdot 1 = b;$$

also $a = b$ im Widerspruch zu $a < b$.

Den 2. Teil der Behauptung (5) beweist man analog.

(7). Sei $a < b$, also $a \leq b \wedge a \neq b$.
Folglich ist $0 = a + (-a) \leq b + (-a)$ und daher

$$\begin{aligned} -b &\leq \Big(b + (-a)\Big) + (-b) = b + \Big((-a) + (-b)\Big) = b + \Big((-b) + (-a)\Big) \\ &= \Big(b + (-b)\Big) + (-a) = 0 + (-a) = (-a) + 0 = -a. \end{aligned}$$

Also $-b \leq -a$.

Angenommen: $-b = -a$.

Dann gilt

$$b = -(-b) = (-1) \cdot (-b) = (-1) \cdot (-a) = -(-a) = a. \qquad \lightning!$$

Die Umkehrung $-b < -a \implies a < b$ beweist man analog.

(11). Sei $0 < a$, dann ist nach (10) auch $0 < \frac{1}{a}$. Wegen $0 < 1$ gibt es nach dem archimedischen Axiom eine natürliche Zahl m, so daß $a < m \cdot 1 = m$.
Analog gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $\frac{1}{a} < n$. Nach (10) erhält man daraus

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{a}} = a. \qquad ❑$$

Definition. (*Potenz*) (induktive Definition) **2/2/5**

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

$a^0 \underset{\mathrm{Df}}{=} 1,$

$a^{n+1} \underset{\mathrm{Df}}{=} a^n \cdot a.$

Bemerkung. Das Rechnen mit Potenzen wird als bekannt vorausgesetzt. Für $n \geq 1$ sei $0^n := 0$. **2/2/6**

Satz 2.3 *Ist $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$, dann gibt es genau ein $b > 0$,* **2/2/7**
so daß $b^m = a$.

Bez.: $b = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$; (*$m$-te Wurzel aus a*)

Beweis. Um zu zeigen, daß es genau ein solches b gibt, hat man einerseits die Existenz **2/2/8/1**
und andererseits die Eindeutigkeit nachzuweisen. Wir beginnen mit dem einfacheren Eindeutigkeitsbeweis.

1. Eindeutigkeit.

Angenommen, es existieren verschiedene $b_1, b_2 > 0$ mit $b_1^m = a = b_2^m$.
Sei o.B.d.A. $b_1 < b_2$. Dann zeigt man leicht (mit Hilfe von Satz 2.2(5)) induktiv über m, daß $b_1^m < b_2^m$. ↯!

2. Existenz.

Es genügt, den Satz für $a > 1$ zu beweisen.
Ist nämlich $a = 1$, dann leistet $b = 1$ das Verlangte, und
ist $0 < a < 1$, so ist $\dfrac{1}{a} > 1$. Für $\dfrac{1}{a}$ existiert nach dem obigen Fall schon ein $c > 0$ mit $c^m = \dfrac{1}{a}$. Folglich ist $a = \dfrac{1}{c^m} = \left(\dfrac{1}{c}\right)^m$.

$b = \dfrac{1}{c}$ leistet somit das Verlangte.

Es sei nun $a > 1$.

(Zum Beweis wird eine geeignete Intervallschachtelung betrachtet.)

Wir definieren eine Folge $\big([a_n, b_n]\big)$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \quad \text{und} \quad a_n^m \le a \le b_n^m \quad \text{für alle } n.$$

Die Definition erfolgt induktiv über n.

Eine Lösung $b > 0$ für $b^m = a$ und $a > 1$ muß – falls eine solche existiert – in dem Intervall $[1, a]$ liegen.
Denn angenommen, $0 < b < 1$. Dann ist auch $b^m < 1 < a$, also $b^m \neq a$.
Wäre andererseits $a < b$, so wäre auch $1 < a < b < b^m$ und somit wiederum $b^m \neq a$.
Wir brauchen also nur in dem Intervall $[1, a]$ nach einer Lösung zu suchen.

Daher beginnen wir mit $a_0 = 1$, $b_0 = a$.

Dann gilt $a_0^m = 1^m = 1 \le a \le a^m = b_0^m$.

Es sei $c_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ (der Mittelpunkt des Intervalls $[a_0, b_0]$).

Für c_1 sind zwei Fälle möglich:

(a) $c_1^m \le a$ oder

(b) $c_1^m > a$.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$.
Es sei

$$a_1 = c_1 \text{ und } b_1 = b_0, \quad \text{falls} \quad c_1^m \le a \quad \text{und}$$

$$a_1 = a_0 \text{ und } b_1 = c_1, \quad \text{falls} \quad c_1^m > a.$$

Dann gilt offenbar

$$a_0 \le a_1 \le b_1 \le b_0 \quad \text{und} \quad a_1^m \le a \le b_1^m.$$

Die gleichen Überlegungen werden im $(n+1)$-ten Schritt angewendet. Die Ausführung des ersten Schrittes – wir haben mit dem 0-tem Schritt begonnen – ist natürlich bei dieser induktiven Definition nicht notwendig, da er als Spezialfall des $(n{+}1)$-ten Schrittes auftritt. Er wurde hier nur des besseren Verständnisses wegen angegeben.

Für n seien a_n und b_n (nach Induktionsvoraussetzung) schon definiert und zwar mit den geforderten Eigenschaften:

$$a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \quad \text{und} \quad a_n^m \le a \le b_n^m.$$

Wir betrachten jetzt $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ $\big($den Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]\big)$.

Für c_{n+1} sind zwei Fälle möglich:

(a) $c_{n+1}^m \le a$ oder

(b) $c_{n+1}^m > a$.

Entsprechend dieser beiden Fälle definiert man das $(n+1)$-te Intervall wie folgt:

$$a_{n+1} = c_{n+1} \ \text{ und } \ b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } \ c_{n+1}^m \le a \quad \text{und}$$

$$a_{n+1} = a_n \ \text{ und } \ b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } \ c_{n+1}^m > a.$$

Damit ist eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein c, so daß $a_n \le c \le b_n$ für jedes n.

Behauptung: $c^m = a$.

Der Beweis hierzu erfolgt indirekt.

Annahme: $c^m \ne a$.

Dann ist $c^m > a$ oder $c^m < a$. Wir betrachten den Fall $c^m > a$, den verbleibenden Fall beweist man völlig analog.

Wegen $c^m > a$ ist $d := c^m - a > 0$.
Es gilt

$$a_n^m \le a \le b_n^m \quad \text{und} \quad a_n^m \le c^m \le b_n^m.$$

Folglich ist

$$\underbrace{b_n^m}_{\ge c^m} - a_n^m \ge c^m + \underbrace{(-a_n^m)}_{\ge -a} \ge c^m - a = d.$$

Also

$$b_n^m - a_n^m \ge d > 0 \ \text{ für jedes } \ n.$$

Es sei jetzt $b_n - a_n = \delta_n$. Dann ist $a_n = b_n - \delta_n = b_n\Big(1 - \dfrac{\delta_n}{b_n}\Big)$ und schließlich

$$b_n^m - a_n^m = b_n^m - b_n^m\Big(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\Big)^m := (\star).$$

Um diesen letzten Ausdruck weiter umformen zu können, benötigen wir noch einen wichtigen Hilfssatz.

Lemma. (*Bernoullische Ungleichung*) **2/2/8/2**
Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ *und ist* m *eine natürliche Zahl, dann gilt* $(1+a)^m \geq 1 + ma$.

Beweis. Den Beweis führt man leicht induktiv über m, er bleibt als Übungsaufgabe. **2/2/8/3**
❏

Korollar. *Sind* $a, b \in \mathbb{R}$ *und ist* $1 < a$, *dann existiert eine natürliche Zahl* m, *so daß* $b < a^m$. **2/2/8/4**

Beweis. Der Beweis erfolgt ohne Schwierigkeiten mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung und des archimedischen Axioms. (Übungsaufgabe!) ❏ **2/2/8/5**

Wir setzen jetzt den begonnenen Beweis des Satzes 2.3 fort. **2/2/8/6**

Wegen $a_n > 0$ (denn $1 \leq a_n \leq b_n \leq a$) gilt

$$\delta_n = b_n - a_n < b_n \quad \text{und somit} \quad 0 < \frac{\delta_n}{b_n} < 1, \quad \text{also} \quad -1 < -\frac{\delta_n}{b_n}.$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung erhält man dann

$$\Big(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\Big)^m \geq 1 - m \cdot \frac{\delta_n}{b_n} \quad \Longrightarrow$$

$$b_n^m \cdot \Big(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\Big)^m \geq b_n^m \cdot \Big(1 - m \cdot \frac{\delta_n}{b_n}\Big) = b_n^m - m \cdot b_n^{m-1} \cdot \delta_n.$$

Folglich ist

$$-b_n^m \cdot \Big(1 - \frac{\delta_n}{b_n}\Big)^m \leq -b_n^m + m \cdot b_n^{m-1} \cdot \delta_n.$$

Wegen $\delta_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ (dies ist induktiv über n nachzuweisen) erhält man schließlich aus $(\star)$ und der letzten Ungleichung

$$b_n^m - a_n^m \leq b_n^m - b_n^m + m \cdot \underbrace{b_n^{m-1}}_{\leq b_0^{m-1}} \cdot \delta_n \leq \underbrace{m \cdot b_0^{m-1} \cdot (b_0 - a_0)}_{:= d' > 0} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Damit haben wir $b_n^m - a_n^m \leq d' \cdot \frac{1}{2^n}$.

Wegen $n \leq 2^n$ (dies ist induktiv nachzuweisen) erhält man für $n \geq 1:\quad 0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ und mit Hilfe des archimedischen Axioms schließlich $d' \cdot \frac{1}{2^n} \leq d' \cdot \frac{1}{n} < d$ für hinreichend große n.
Aus der Annahme $c^m \neq a$ hatten wir aber schon geschlossen, daß $b_n^m - a_n^m \geq d$ für alle n gilt. Dies führt zu einem Widerspruch. Folglich kann die Annahme nicht richtig gewesen sein. Also $c^m = a$. ❏

Bemerkung. Damit ist die m-te Wurzel aus einer positiven reellen Zahl definiert, und diese Wurzel ist selbst positiv. **2/2/9**

Definition. (*Potenzen mit rationalen Exponenten*) **2/2/10**

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, und es sei $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

$$a^{\frac{m}{n}} \underset{\text{Df}}{=} \sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \underset{\text{Df}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Satz 2.4 **2/2/11**

(1) *Die rationalen und die reellen Zahlen sind dicht geordnet*
(d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere rationale Zahl, und zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine weitere reelle Zahl).

(2) *Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht in* $\mathbb{R}$
(d.h., zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl).

(3) *Zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine irrationale Zahl.*

Beweis. (1). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann ist $a < \frac{a+b}{2} < b$ (nach Satz 2.2(12). **2/2/12**
Sind zusätzlich a und b rational, dann ist auch $\frac{a+b}{2}$ rational.

(2). Seien wieder $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Wir konstruieren eine rationale Zahl r mit der Eigenschaft $a < r < b$.
Wegen $0 < b - a$ existiert (nach Satz 2.2 (11)) eine natürliche Zahl m, so daß

$$0 < \frac{1}{m} < b - a \quad \text{und damit} \quad a < a + \frac{1}{m} < b.$$

1. Fall: $0 < a$.

Nach dem archimedischen Axiom gibt es ein n, so daß $a < n \cdot \frac{1}{m}$.

Sei n_0 die kleinste natürliche Zahl mit $a < n_0 \cdot \frac{1}{m}$, also $a \geq (n_0 - 1) \cdot \frac{1}{m}$.

Wegen $a < a + \dfrac{1}{m} < b$ ist dann

$$a < n_0 \cdot \frac{1}{m} = \underbrace{(n_0 - 1) \cdot \frac{1}{m}}_{\leq a} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < b.$$

$r = \dfrac{n_0}{m}$ leistet also das Verlangte.

2. Fall: $a = 0 < b$.

Nach Satz 2.2(11) existiert ein n mit $a = 0 < \dfrac{1}{n} < b$;
also $r = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ leistet das Verlangte.

3. Fall: $a < 0 < b$; trivial.

4. Fall: $a < 0 = b$, also $b = 0 < -a$.

Wie im 2. Fall existiert ein n, so daß $0 < \dfrac{1}{n} < -a$. Folglich ist $a < -\dfrac{1}{n} < 0 = b$.

5. Fall: $a < b < 0$, also $0 < -b < -a$.

Nach dem Fall 1 existiert eine rationale Zahl r, so daß $-b < r < -a$,
folglich ist $a < -r < b$ und $-r \in \mathbb{Q}$.

(3). Es seien $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ und $r_1 < r_2$, also $r_2 - r_1 > 0$.
Nach dem archimedischen Axiom existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\sqrt{2} < n(r_2 - r_1)$.
Daraus folgt

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < r_2 - r_1 \quad \text{und} \quad r_1 < \frac{\sqrt{2}}{n} + r_1 < r_2.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $a := \dfrac{\sqrt{2}}{n} + r_1$ irrational ist.

Annahme: a ist rational.
Dann ist wegen $a - r_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ auch $n(a - r_1) = \sqrt{2}$ rational. ↯! ❏

Nach dem letzten Satz könnte man versucht sein anzunehmen, daß es genauso viele rationale wie reelle Zahlen gibt. Dies erweist sich aber als falsch. Ehe wir uns diesem Problem zuwenden, werden wir zunächst klären, was unter „gleich viele“ bzw. „gleichmächtig“ zu verstehen ist. **2/2/13**

Definition. (*gleichmächtig*) **2/2/14**

Zwei Mengen M und N sind *gleichmächtig* (**Bez.:** $M \sim N$)
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Es gibt eine Bijektion zwischen M und N.

Wenn $M \sim \mathbb{N}$, dann heißt M auch *abzählbar* (*unendlich*). **2/2/15**

Ist M unendlich aber nicht gleichmächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen, dann heißt M *überabzählbar.*

Satz 2.5 **2/2/16**

(1) *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar,*
d.h., es gibt genauso viele rationale wie natürliche Zahlen.
(Die Menge der rationalen Zahlen kann also mit Hilfe der natürlichen Zahlen „durchnumeriert" werden.)

(2) *Die Menge der reellen Zahlen in dem Intervall* $(0,1)$ *ist überabzählbar.*
Folglich ist auch die Menge $\mathbb{R}$ *überabzählbar.*
(Das Intervall $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ wird auch als *Kontinuum* bezeichnet.)

Beweis. (1). Der Beweis erfolgt mit dem *ersten Cantorschen Diagonalverfahren.* **2/2/17**

Wir setzen hierbei voraus, daß man jede positive rationale Zahl als Bruch zweier positiver natürlicher Zahlen darstellen kann. Offenbar kommt jede positive rationale Zahl in dem folgenden unendlichen Schema wenigstens einmal (sogar unendlich oft) vor.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{\frac{1}{1}} & & \mathbf{\frac{1}{2}} & \rightarrow & \mathbf{\frac{1}{3}} & & \mathbf{\frac{1}{4}} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \cdots \\
\mathbf{\frac{2}{1}} & & \mathbf{\frac{2}{2}} & & \mathbf{\frac{2}{3}} & & \mathbf{\frac{2}{4}} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \cdots \\
\mathbf{\frac{3}{1}} & & \mathbf{\frac{3}{2}} & & \mathbf{\frac{3}{3}} & & \mathbf{\frac{3}{4}} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \cdots \\
\mathbf{\frac{4}{1}} & & \mathbf{\frac{4}{2}} & & \mathbf{\frac{4}{3}} & & \mathbf{\frac{4}{4}} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Entsprechend der Pfeilrichtungen (diagonal) werden alle Brüche aufgelistet:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \quad \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \ldots .$$

Wir lassen jetzt alle die rationalen Zahlen weg, die in der Auflistung zuvor schon einmal aufgetreten sind; es sind dies $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \ldots$. Damit entsteht eine neue Auflistung $r_0, r_1, r_2, \ldots,$ in der jede positive rationale Zahl genau einmal vorkommt. Folglich ist

$$\mathbb{Q} = \{0, -r_0, r_0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \ldots\}.$$

Definiert man eine Abbildung f wie folgt:

$$f(0) := 0, \quad f(2n-1) := -r_{n-1} \quad \text{und} \quad f(2n) := r_{n-1} \quad \text{für jedes } n \geq 1,$$

dann ist f offenbar eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$, und folglich ist $\mathbb{Q}$ abzählbar.

(2). Der Beweis erfolgt mit dem *zweiten Cantorschen Diagonalverfahren.*

Angenommen, das Intervall $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist abzählbar.

Wir setzen hierbei voraus, daß jede reelle Zahl aus $(0,1)$ eine eindeutige Darstellung als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, n_1 n_2 n_3 \ldots$ besitzt, wobei $0 \leq n_i \leq 9$ ist und 9-Periode ausgeschlossen wird. Denn ist $a = 0,\, n_1 \ldots n_k\, 9\,9\,9 \ldots$ und $n_k < 9$, dann ist $a = 0,\, n_1 \ldots n_{k-1}\, (n_k + 1)\, 0\,0\,0 \ldots$ eine weitere Darstellung von a. Damit wäre die Eindeutigkeit der Darstellbarkeit verletzt.

Nach der obigen Annahme ist $(0,1) \sim \mathbb{N}$. Folglich gibt es eine Aufzählung der reellen Zahlen in $(0,1)$ (eineindeutige Numerierung mit natürlichen Zahlen):

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0,\, n_{11}\, n_{12}\, n_{13} \ldots \\
a_1 &= 0,\, n_{21}\, n_{22}\, n_{23} \ldots \\
a_2 &= 0,\, n_{31}\, n_{32}\, n_{33} \ldots \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

wobei $0 \leq n_{ij} \leq 9$ und 9-Periode nicht auftritt. Nach Voraussetzung erscheint in dieser Aufzählung jede reelle Zahl aus $(0,1)$ genau einmal.

Wir konstruieren jetzt ein $b \in (0,1)$, das in dieser Aufzählung nicht vorkommt und erhalten somit einen Widerspruch.

Sei $b = 0,\, m_1\, m_2\, m_3 \ldots$ mit $0 < m_i < 9$ und $m_i \neq n_{ii}$ für alle i. Dann ist insbesondere $0 < b < 1$, und b unterscheidet sich von jedem a_i wenigstens an der $(i+1)$-ten Stelle. ↯! ❑

Absolutbetrag von reellen Zahlen **2/2/18**

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. **2/2/19**

$$|a| \underset{\text{Df}}{\equiv} \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Bez.: $|a|$ heißt *Betrag* oder *Absolutbetrag* von a, und $|a-b|$ heißt *Abstand* zwischen a und b.

Satz 2.6 *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt:* **2/2/20**

(1) $|a| \geq 0$, *und* $|a| = 0 \iff a = 0$.

(2) $|a| = |-a|$. $\quad (\Longrightarrow\ |a-b| = |b-a|.)$

(3) $-a \leq |a|$ *und* $a \leq |a|$. $\quad (\Longrightarrow$ *wenn* $-a \leq |b|$ *und* $a \leq |b|$, *so* $|a| \leq |b|$.)

(4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. $\quad (\Longrightarrow\ |a^n| = |a|^n.)$

(5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, *falls* $b \neq 0$.

Beweis. Die Eigenschaften lassen sich leicht auf die Definition zurückführen; ihr Beweis bleibt als Übung. ❏ **2/2/21**

Satz 2.7 (*Dreiecksungleichungen*) **2/2/22**
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(1) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

(2) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

Beweis. (1). Nach Satz 2.6(3) gilt: $\pm a \leq |a|$ und $\pm b \leq |b|$. **2/2/23**

1. Fall: $a+b \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad |a+b| = a+b \leq |a| + |b|$.

2. Fall: $a+b < 0 \quad \Longrightarrow \quad |a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$.

In jedem Fall ist also $|a+b| \leq |a| + |b|$.

(2). Nach (1) gilt:

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b| \quad \Longrightarrow \quad |a| - |b| \leq |a-b|.$$

Analog erhält man

$$|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a| \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{|b| - |a|}_{-(|a|-|b|)} \leq |b-a| = |a-b|.$$

Also $\pm(|a| - |b|) \leq |a-b|$, und somit gilt

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|. \quad ❏$$

2.3 Mengen von reellen Zahlen

Wir stellen jetzt einige grundlegende Eigenschaften von Mengen von reellen Zahlen zusammen. Hierbei nutzen wir ganz wesentlich die Ordnung von $\mathbb{R}$ aus. **2/3/0**

Definition. (*Schranke*) **2/3/1**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *obere Schranke* von M
$\;\;\;\underset{\text{Df}}{\equiv}\;\; x \leq a$ für jedes $x \in M$.

(2) $a \in \mathbb{R}$ ist eine *untere Schranke* von M
$\;\;\;\underset{\text{Df}}{\equiv}\;\; a \leq x$ für jedes $x \in M$.

(3) M ist *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*

$\overline{\overline{\text{Df}}}$ M besitzt eine obere (bzw. untere) Schranke.

(4) M ist *beschränkt*

$\overline{\overline{\text{Df}}}$ M ist nach oben und nach unten beschränkt.

Definition. (*Grenze*) **2/3/2**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) Sei M nach oben beschränkt. a ist *obere Grenze* von M

$\overline{\overline{\text{Df}}}$ a ist die kleinste obere Schranke von M.

Bez.: $a = \sup M$ (*Supremum von* M).

(2) Sei M nach unten beschränkt. a ist *untere Grenze* von M

$\overline{\overline{\text{Df}}}$ a ist die größte untere Schranke von M.

Bez.: $a = \inf M$ (*Infimum von* M).

Diese Definition bedarf einer Rechtfertigung. Es muß nämlich nachgewiesen werden, daß eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke überhaupt existiert. Dies erfolgt mit dem nachfolgenden Satz. **2/3/3**

Satz 2.8 **2/3/4**

(1) *Jede nicht leere und nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere Grenze.*
(2) *Jede nicht leere und nach unten beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine untere Grenze.*
(3) *Jede nicht leere und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt eine obere und eine untere Grenze.*

Bemerkung. Teil (1) des Satzes heißt: *Satz von der oberen Grenze.* Er hat grundlegende Bedeutung für die Analysis. (1) ist unter anderem auch äquivalent zum Intervallschachtelungsaxiom, d.h., man kann anstelle von Axiom IV für die reellen Zahlen auch den Satz von der oberen Grenze wählen. **2/3/5**

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$. **2/3/6**

(1). Es sei $a \in M$ und b eine obere Schranke von M. Wenn M überhaupt eine obere Grenze besitzt, dann muß sie schon in dem Intervall $[a, b]$ liegen. Denn ist $c < a$, dann ist c keine obere Schranke von M und damit erst recht keine obere Grenze. Ist $b < c$, dann ist c nicht die kleinste obere Schranke von M. Wir brauchen also nur in dem Intervall $[a, b]$ nach einer oberen Grenze von M zu suchen, und dies geschieht mit Hilfe einer Intervallschachtelung.

Wir konstruieren eine Intervallfolge $\big([a_n, b_n]\big)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$,

- b_n ist eine obere Schranke von M,
- für jedes n existiert ein $x \in M$ mit $a_n \leq x$,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Wir starten mit

$$a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

Es sei $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Für c_1 sind zwei Fälle möglich, nämlich:

(a) c_1 ist eine obere Schranke von M oder

(b) c_1 ist keine obere Schranke von M. Dann existiert ein $x \in M$, so daß $c_1 < x$.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$.

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls } c_1 \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist},$$

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0, \quad \text{falls } c_1 \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist}.$$

Damit gilt stets $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ und b_1 ist eine obere Schranke von M.
Weiterhin gibt es ein $x \in M$ mit $a_1 \leq x$, und schließlich ist $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$.

Bemerkung. Die Definition des Intervalls $[a_1, b_1]$ hätte man sich ersparen können, da $[a_1, b_1]$ als Spezialfall von $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ auftritt. Nur des besseren Verständnisses wegen ist dieser Fall hier diskutiert worden.

Seien nun (entsprechend der Induktionsvoraussetzung) a_n und b_n schon mit den geforderten Eigenschaften definiert.
Es sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.
Analog wie im ersten Schritt können für c_{n+1} wieder zwei Fälle eintreten:

(a) c_{n+1} ist eine obere Schranke von M oder

(b) c_{n+1} ist keine obere Schranke von M.

Entsprechend dieser Fälle definieren wir:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ eine obere Schranke von } M \text{ ist},$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } c_{n+1} \text{ keine obere Schranke von } M \text{ ist}.$$

Man überprüft leicht, daß $\big([a_n, b_n]\big)$ eine Intervallschachtelung mit den gewünschten Eigenschaften ist.
Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1: c ist eine obere Schranke von M.

Es ist zu zeigen: Für jedes $x \in M$ gilt: $x \leq c$.

Annahme: c ist keine obere Schranke von M.

Dann existiert ein $x \in M$ mit $c < x$. Da b_n nach Definition eine obere Schranke von M ist, gilt: $a_n \leq c < x \leq b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Es ist $\underbrace{x - c}_{:= d} > 0$, und wegen $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ erhält man $b_n - a_n < d$ für hinreichend große n.

Dies liefert einen Widerspruch.

Behauptung 2: c ist die kleinste obere Schranke (also obere Grenze) von M.

Annahme: c ist nicht die kleinste obere Schranke von M.

Dann gibt es eine kleinere obere Schranke d von M, also $d < c$, und d ist ebenfalls eine obere Schranke von M.

Nach Voraussetzung existiert für a_n ein $x \in M$, so daß $a_n \leq x$. Wegen $x \leq d$ gilt insgesamt

$$a_n \leq x \leq d < c \leq b_n.$$

Analog wie beim Beweis von Behauptung 1 erhält man einen Widerspruch.

Folglich ist c obere Grenze von M.

(2) bleibt als Übungsaufgabe.

Hinweis: Sei $M \neq \emptyset$ und M nach unten beschränkt.
Man bilde $M^- = \{-x : x \in M\}$.
g.z.z.: M ist nach unten beschränkt gdw M^- nach oben beschränkt ist, und
c ist obere Grenze von M^- gdw $-c$ untere Grenze von M ist.

Es läßt sich auch zeigen, daß die Eigenschaften (1) und (2) äquivalent sind.

(3). Zusammenfassung von (1) und (2). ❑

Bemerkung. Wir haben gezeigt, daß unter Benutzung der Axiome I – IV der Satz von der oberen Grenze gilt. **2/3/7**

Man kann auch umgekehrt unter Benutzung der Axiome I – III und des Satzes von der oberen Grenze zeigen, daß das Intervallschachtelungsaxiom gilt, d.h., unter Zugrundelegung der Axiome I – III sind das Intervallschachtelungsaxiom und der Satz von der oberen Grenze äquivalent.

Wir geben jetzt einen Beweis hierfür an.

Mit Hilfe des Intervallschachtelungsaxioms wurde bereits der Satz von der oberen Grenze bewiesen. Es bleibt noch zu zeigen, daß auch das Intervallschachtelungsaxiom aus diesem Satz folgt.

Dazu sei $\big([a_n, b_n]\big)$ eine Intervallschachtelung und $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ und durch jedes b_n nach oben beschränkt. Folglich besitzt M eine obere Grenze c, und somit ist stets $a_n \leq c$.

Es bleibt zu zeigen: $c \leq b_n$ für alle n.

Angenommen, es gibt ein k, so daß $b_k < c$.

Nach den obigen Betrachtungen ist b_k eine obere Schranke von M, die kleiner als c ist. Folglich ist c nicht obere Grenze von M. $\lightning$! ❑

Definition. (*Maximum, Minimum*) **2/3/8**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.

(1) M besitzt ein *Maximum*

$\overset{=}{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in M$, so daß $x \leq a$ für jedes $x \in M$.

Bez.: $a = \max M$ (a heißt Maximum von M).

(2) M besitzt ein *Minimum*

$\overset{=}{\text{Df}}$ Es existiert ein $a \in M$, so daß $a \leq x$ für jedes $x \in M$.

Bez.: $a = \min M$ (a heißt Minimum von M).

Folgerung. **2/3/9**

(1) Besitzt M ein Maximum (bzw. Minimum), so ist
$\max M = \sup M$ (bzw. $\min M = \inf M$).

(2) Gehören $\sup M$ (bzw. $\inf M$) zu M, dann gilt stets
$\max M = \sup M$ (bzw. $\min M = \inf M$).

Definition. (*Umgebung*) **2/3/10**

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(1) U heißt ε-*Umgebung* von a

$\overset{=}{\text{Df}}$ $U = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$,
(d.h., $U = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$).

Bez.: $U = U_\varepsilon(a)$.

(2) U ist eine *Umgebung* von a

$\overset{=}{\text{Df}}$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Bez.: $U(a)$.

Definition. (*Häufungspunkt*) **2/3/11**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a ist ein Häufungspunkt von M

$\overset{=}{\text{Df}}$ In jeder ε-Umgebung von a liegt wenigstens ein von a verschiedenes Element (:= Punkt) aus M,
(d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x \neq a$ und $x \in U_\varepsilon(a)$).

Satz 2.9 *Ist a ein Häufungspunkt von M, dann liegen in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Elemente aus M.* **2/3/12**

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von M und $\varepsilon > 0$. **2/3/13**

Annahme: In $U_\varepsilon(a)$ gibt es nur endlich viele Elemente $b \in M$ mit $b \neq a$; es seien dies $b_1, \ldots, b_n$.

Wegen $b_i \neq a$, $i = 1, \ldots, n$, ist $|b_i - a| > 0$.
Sei $\varepsilon' := \min\{|b_1 - a|, \ldots, |b_n - a|\} > 0$.
Nach Definition des Häufungspunktes existiert ein $b \in M$, so daß $b \neq a$ und $b \in U'_\varepsilon(a)$; also $|b - a| < \varepsilon'$.
Wegen $b_i \in U_\varepsilon(a)$ ist $|b_i - a| < \varepsilon$ und damit $\varepsilon' \leq |b_i - a| < \varepsilon$. Folglich ist $U'_\varepsilon(a) \subseteq U_\varepsilon(a)$ und somit $b \in U_\varepsilon(a)$, also $b \in \{b_1, \ldots, b_n\}$.
Sei $b = b_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$|b - a| = |b_i - a| < \varepsilon' \leq |b_i - a|. \quad \lightning!$$

Folglich ist unsere Annahme falsch. ❏

Satz 2.10 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und M' die Menge aller Häufungspunkte von M.* **2/3/14**
Ist a ein Häufungspunkt von M', dann ist a schon ein Häufungspunkt von M.

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von M' und $\varepsilon > 0$. **2/3/15**

z.z.: In $U_\varepsilon(a)$ gibt es ein $c \in M$ mit $c \neq a$.

Da a ein Häufungspunkt von M' ist, existiert ein $b \in M$, so daß $b \neq a$ und $b \in U_\varepsilon(a)$. Folglich ist b ein Häufungspunkt von M. Dann existieren in jeder δ-Umgebung von a (mit $\delta > 0$) unendlich viele Elemente aus M. Insbesondere gibt es dann ein $c \in M$ mit $c \neq a$ und $c \in U_\delta(b)$.

Insgesamt haben wir: $b \in U_\varepsilon(a) \implies |a - b| < \varepsilon$ und
$c \in U_\delta(b) \implies |b - c| < \delta$.

Wir wählen speziell $\delta = \varepsilon - |a - b| > 0$, also $|a - b| + \delta = \varepsilon$. Folglich gilt

$$|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + \underbrace{|b - c|}_{<\,\delta} < |a - b| + \delta = \varepsilon.$$

Also $c \in U_\varepsilon(a)$, $c \neq a$ und $c \in M$. ❏

Satz 2.11 (*Satz von Bolzano-Weierstraß*) **2/3/16**

Jede unendliche und beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt (wenigstens) einen Häufungspunkt.

Beweis. (Beweis mit Intervallschachtelung!) **2/3/17**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, M unendlich und beschränkt. Dann existieren Elemente $a, b \in \mathbb{R}$, so daß $a \leq x \leq b$ für jedes $x \in M$.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $\big([a_n, b_n]\big)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$,
- in jedem $[a_n, b_n]$ liegen unendlich viele Elemente aus M,
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Sei $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Dann ist $M \subseteq [a_0, b_0]$ und $[a_0, b_0] \cap M$ unendlich.

Sei $c_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Dann ist $[a_0, b_0] = [a_0, c_1] \cup [c_1, b_0]$.

Da $[a_0, b_0]$ unendlich viele Elemente aus M enthält, muß dies auch für $[a_0, c_1]$ oder für $[c_1, b_0]$ gelten.

Entsprechend dieser Fallunterscheidung definieren wir:

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1, \quad \text{falls } [a_0, c_1] \cap M \text{ unendlich ist und}$$

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0, \quad \text{anderenfalls} \quad (\Longrightarrow [c_1, b_0] \cap M \text{ unendlich}).$$

In jedem Falle ist $[a_1, b_1] \cap M$ unendlich, und weiterhin gilt $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$ und $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$.

Seien a_n, b_n schon (entsprechend der Induktionsvoraussetzung) mit den geforderten Eigenschaften definiert.

Sei $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Da $[a_n, b_n] = [a_n, c_{n+1}] \cup [c_{n+1}, b_n]$ und $[a_n, b_n] \cap M$ unendlich ist, gilt:
$[a_n, c_{n+1}] \cap M$ ist unendlich oder $[c_{n+1}, b_n] \cap M$ ist unendlich. Entsprechend dieser Fallunterscheidung definiert man:

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } [a_n, c_{n+1}] \cap M \text{ unendlich ist und}$$

$$a_{n+1} = c_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n, \quad \text{sonst.}$$

Offensichtlich besitzt $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ die geforderten Eigenschaften.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n.

Behauptung: c ist ein Häufungspunkt von M.

z.z.: Wenn $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $x \in M$ mit $x \neq c$ und $x \in U_\varepsilon(c)$.

Wählt man n so groß, daß $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) < \varepsilon$, dann ist wegen $a_n \leq c \leq b_n$ auch $c - a_n,\ b_n - c < \varepsilon$ und damit $c - \varepsilon < a_n,\ b_n < c + \varepsilon$. Schließlich gilt:

$$[a_n, b_n] \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = U_\varepsilon(c).$$

Da $[a_n, b_n]$ unendlich viele Elemente aus M enthält, liegen auch unendlich viele Elemente aus M in $U_\varepsilon(c)$. Folglich ist c ein Häufungspunkt von M. ❏

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 2

- Irrationalität von $\sqrt{2}$; **2/4/1**
- Grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen (Axiomensystem für reelle Zahlen); **2/4/2**
- Definitionen: inverses Element, reziprokes Element, Potenz, Wurzel; **2/4/3**
- Bernoullische Ungleichung; inhaltliches Verständnis von Satz 2.2 (Eigenschaften der Ordnungsrelation); **2/4/4**
- Ordnungseigenschaften der rationalen und reellen Zahlen (Satz 2.4); erstes und zweites Cantorsches Diagonalverfahren (zum Nachweis der Abzählbarkeit der rationalen und der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen); **2/4/5**
- Betrag von reellen Zahlen; Dreiecksungleichungen; **2/4/6**
- Definitionen: obere und untere Schranken und Grenzen; Supremum, Infimum, Maximum, Minimum; **2/4/7**
- Satz von der oberen Grenze; **2/4/8**
- Definitionen: Umgebung, Häufungspunkt; **2/4/9**
- Satz von Bolzano-Weierstraß. **2/4/10**