# Kapitel 3
# Folgen von reellen Zahlen

## 3.1 Konvergenz von Folgen

**Satz 3.1** *Eine Folge* $(a_n)$ *hat höchstens einen Grenzwert* **3/1/5**
(d.h., $(a_n)$ konvergiert gegen höchstens eine Zahl).

**Beweis.** Angenommen, $a_n \to a$ und $a_n \to b$ und $a \neq b$. **3/1/6**
Dann ist $|a-b| > 0$.
Nach Definition der Konvergenz gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0$, so daß für jedes $n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$, und es existiert ein $m_0$, so daß für jedes $n \geq m_0 : |a_n - b| < \varepsilon$.
Das gilt speziell für $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$.
Ist $k = \max\{n_0, m_0\}$, dann gilt für $n \geq k$

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

Also

$$|a-b| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|a-b|}{2} = |a-b| \qquad \lightning! \qquad \square$$