

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.1 Konvergenz von Folgen

##### Beispiele.

1.  $\left(\frac{1}{n}\right)$  und  $(0)$  sind triviale Beispiele für Nullfolgen.

3/1/8/1

2. Es sei  $|a| < 1$  und  $(a_n) = (a^n)$ .

3/1/8/2

Um nachzuweisen, daß  $(a^n)$  eine Nullfolge ist, g.z.z.:

Wenn  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  :  $|a^n - 0| < \varepsilon$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $a = 0$  ist die Behauptung trivial.

Es sei jetzt  $a \neq 0$ . Wegen  $|a| < 1$  ist  $\frac{1}{|a|} > 1$ .

Nach dem Korollar zur Bernoullischen Ungleichung existiert für  $\frac{1}{\varepsilon}$  eine natürliche Zahl

$n_0$ , so daß  $\left(\frac{1}{|a|}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ . Folglich ist  $\frac{1}{|a_0|^{n_0}} > \frac{1}{\varepsilon}$ , also  $|a|^{n_0} < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0$  gilt

damit  $|a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \varepsilon$ .