Kapitel 3
Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.6 *Ist a ein Häufungspunkt der Folge (a_n), dann existiert eine Teilfolge von* **3/1/23**
(a_n), die gegen a konvergiert.

Beweis. Sei a ein Häufungspunkt von (a_n). **3/1/24**
Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes n_0 existiert ein $n \geq n_0$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$.
Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ wählen wir $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$.
Damit erhält man:

für $\varepsilon_1 = 1$ und $n_0 = 1$ gibt es ein $n_1 \geq n_0$, so daß $|a_{n_1} - a| < \varepsilon_1 = 1$;

für $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$ und $n_0 = n_1 + 1$ gibt es ein $n_2 \geq n_0$, so daß $|a_{n_2} - a| < \varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$;

für $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{3}$ und $n_0 = n_2 + 1$ gibt es ein $n_3 \geq n_0$, so daß $|a_{n_3} - a| < \varepsilon_3 = \dfrac{1}{3}$;

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Wegen $n_0 := 0 < n_1 < n_2 < \ldots$ ist (a_{n_i}) eine Teilfolge von (a_n), und (a_{n_i}) konvergiert offenbar gegen a. ❏