

## Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

### 3.1 Konvergenz von Folgen

**Satz 3.8** *Eine monotone Folge ist konvergent gdw sie beschränkt ist.*

3/1/33

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) Konvergente Folgen sind beschränkt (nach Satz 3.3; hierzu ist die Monotonie nicht notwendig). 3/1/34

( $\longleftarrow$ ) Sei  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt (für „fallend“ verläuft der Beweis analog).  
z.z.:  $(a_n)$  ist konvergent.

Sei  $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Behauptung:  $a_n \rightarrow a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung ist  $a$  kleinste obere Schranke von  $(a_n)$ , d.h., ist  $a' < a$ , dann ist  $a'$  keine obere Schranke von  $(a_n)$ . Sei  $a' = a - \varepsilon$ , dann existiert ein Folgenglied  $a_{n_0}$ , so daß  $a - \varepsilon < a_{n_0}$ . Da  $(a_n)$  monoton wächst, gilt für alle  $n \geq n_0$ :

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a, \quad \text{also} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_0. \quad \square$$