Kapitel 3
Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.9 (*Cauchysches Konvergenzkriterium*) **3/1/37**
Eine Folge (a_n) *ist konvergent* (in $\mathbb{R}$) *gdw*
für jedes $\varepsilon > 0$ *ein* n_0 *existiert, so daß für jedes* $m, n \geq n_0$ *gilt*: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Beweis. $(\longrightarrow)$ Sei (a_n) konvergent, $a_n \to a$. **3/1/38**
Nach Definition existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß für $n \geq n_0$ stets gilt: $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Folglich ist

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_m|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \text{für} \ \ m, n \geq n_0.$$

$(\longleftarrow)$ Wir zeigen zunächst, daß (a_n) beschränkt ist.
Es sei $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein n_0, so daß $|a_n - a_m| < 1$ für jedes $m, n \geq n_0$.
Für $m = n_0$ ist insbesondere $|a_n - a_{n_0}| < 1$.
Wir wählen $d = \max\{|a_i - a_{n_0}| \, : \, i = 0, \ldots, n_0 - 1\}$.
Dann gilt für beliebige n

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + d + |a_{n_0}| := c.$$

Folglich ist (a_n) beschränkt. Damit besitzt (a_n) einen Häufungspunkt a und eine konvergierende Teilfolge (a_{n_i}) mit $a_{n_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} a$. (Korollar zu Satz 3.6; Satz 3.4)
Nach Definition gilt dann:
Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein m_0, so daß für jedes $n_i \geq m_0$ gilt: $|a_{n_i} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Nach Voraussetzung existiert ein m_0', so daß für jedes $m, n \geq m_0'$ gilt: $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Für $n, n_i \geq m_0, m_0'$ gilt dann

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_i}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_i} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Also $a_n \to a$. ❑