

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*)

3/1/43

Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen und c, d seien reelle Zahlen. Dann gilt:

- (1) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.
- (2) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (3) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
- (4) Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergent und

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}.$$
- (4') Sind alle $b_n \neq 0$ und ist $\lim b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent
 und
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$
- (5) $(|a_n|)$ ist konvergent und $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- (6) Ist $a_n \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
 Ist insbesondere $a_n \leq d$ bzw. $d \leq b_n$ für jedes n , dann ist $\lim a_n \leq d$
 bzw. $d \leq \lim b_n$.

Beweis zu (4). Es ist

3/1/44/4

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| \\ &= \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\leq \frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| := (\star\star\star). \end{aligned}$$

Wegen $b_n \rightarrow b$ existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |b|^2. \implies (\star\star\star) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}$.

(4'). Wegen $b_n \neq 0$, $b_n \rightarrow b$ und $b \neq 0$ gilt $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. Da auch $a_n \rightarrow a$ erhält man mit (3)

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \implies$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

(5). Es ist $\left| |a_n| - |a| \right| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ für hinreichend große n . $\implies |a_n| \rightarrow |a|$.
Also $\lim |a_n| = |a| = |\lim a_n|$.

(6). Sei $c_n := b_n - a_n$ (≥ 0).

g.z.z.: $\lim c_n \geq 0$.

Denn dann gilt ja

$$0 \leq \lim c_n = \lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n \implies$$

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Annahme: $\lim c_n := c < 0$.

Sei $\varepsilon = \frac{|c|}{2} = -\frac{c}{2}$. Dann liegen in $U_\varepsilon(c)$ fast alle c_n . \implies

$$c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon, \text{ also } c - \left(-\frac{c}{2}\right) < c_n < c + \left(-\frac{c}{2}\right) \implies$$

$$\frac{3}{2} \cdot c < c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad \text{!}$$

Ist speziell $a_n \leq d$, so ist $\lim a_n \leq \lim d = d$ (d als konstante Folge betrachtet).

Analoges gilt für $d \leq b_n$. \square