Kapitel 3
Folgen von reellen Zahlen

3.1 Konvergenz von Folgen

Satz 3.10 (*Eigenschaften konvergenter Folgen*) **3/1/43**

Es seien $(a_n), (b_n)$ *konvergente Folgen und* c, d *seien reelle Zahlen. Dann gilt:*

(1) $(c \cdot a_n)$ *ist konvergent und* $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.

(2) $(a_n + b_n)$ *ist konvergent und* $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.

(3) $(a_n \cdot b_n)$ *ist konvergent und* $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.

(4) *Sind alle* $b_n \neq 0$ *und ist* $\lim b_n \neq 0$, *dann ist* $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ *konvergent und* $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$.

(4′) *Sind alle* $b_n \neq 0$ *und ist* $\lim b_n \neq 0$, *dann ist* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *konvergent und* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

(5) $(|a_n|)$ *ist konvergent und* $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.

(6) *Ist* $a_n \leq b_n$ *für jedes* n, *dann ist* $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Ist insbesondere $a_n \leq d$ *bzw.* $d \leq b_n$ *für jedes* n, *dann ist* $\lim a_n \leq d$ *bzw.* $d \leq \lim b_n$.

Beweis. Es sei $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und sei $\varepsilon > 0$. **3/1/44/1**

(1). Es ist $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| := (\star)$.

1. Fall: $c = 0$. $\Longrightarrow$ $(\star) < \varepsilon$ für jedes $n \geq 0$.

2. Fall: $c \neq 0$. $\Longrightarrow$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ für fast alle n.

Damit erhält man

$$|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c| \cdot |a_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

In jedem Fall ist also

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot a = c \cdot \lim a_n.$$

(2). Nach Voraussetzung gilt: $a_n \to a$, $b_n \to b$.

Folglich existiert ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhält man

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$.

Also

$$\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n.$$

(3). Es soll $|a_n \cdot b_n - a \cdot b|$ durch ε „abgeschätzt“ werden, und zwar für fast alle n. Es ist bekannt, daß $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ „klein“ werden für hinreichend große n. Wir beginnen zu rechnen und versuchen ein n_0 so zu finden, daß die Abschätzung gelingt.

$$\begin{aligned}
|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \\
&\leq |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| \\
&= \underbrace{|a_n|}_{?} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\textit{klein}} + |b| \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{\textit{klein}} := (\star\star)
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist (a_n) konvergent, also auch beschränkt durch ein $c > 0$, d.h., $|a_n| \leq c$.

Daraus ergibt sich

$$|a_n| \cdot |b_n - b| \leq c \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Dies gilt aber nach (1) für hinreichend große n.

Analog gilt auch $|b| \cdot |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für große n.

Damit erhält man insgesamt $(\star\star) < \varepsilon$.

(4). Um diese Behauptung beweisen zu können, benötigen wir zunächst ein

Lemma. *Wenn* $\lim b_n = b \neq 0$, *dann existiert ein* m_0, *so daß für jedes* $n \geq m_0$ *gilt*: $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$. **3/1/44/2**

Beweis. Sei $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. Wegen $b_n \to b$ gibt es ein m_0, so daß für jedes $n \geq m_0$ gilt: $|b_n - b| < \varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. **3/1/44/3**

Weiterhin gilt:

$$\Big||b_n| - |b|\Big| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$-\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$\frac{|b|}{2} < |b_n| < \frac{3}{2} \cdot |b| \implies$$

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}. \quad ❑$$

Beweis zu (4). Es ist

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b-b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n|\cdot|b|}\cdot|b-b_n| \\ &= \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\leq \frac{2}{|b|}}\cdot\frac{1}{|b|}\cdot|b_n-b| \leq \frac{2}{|b|^2}\cdot|b_n-b| := (\star\star\star). \end{aligned}$$

Wegen $b_n \to b$ existiert für $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot|b|^2. \implies (\star\star\star) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Also $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}$.

(4′). Wegen $b_n \neq 0$, $b_n \to b$ und $b \neq 0$ gilt $\frac{1}{b_n} \to b$. Da auch $a_n \to a$ erhält man mit (3)

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \implies$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

(5). Es ist $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ für hinreichend große n. $\implies$ $|a_n| \to |a|$.
Also $\lim |a_n| = |a| = |\lim a_n|$.

(6). Sei $c_n := b_n - a_n$ (≥ 0).
g.z.z.: $\lim c_n \geq 0$.
Denn dann gilt ja

$$0 \leq \lim c_n = \lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n \implies$$

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Annahme: $\lim c_n := c < 0$.
Sei $\varepsilon = \frac{|c|}{2} = -\frac{c}{2}$. Dann liegen in $U_\varepsilon(c)$ fast alle c_n. $\implies$

$$c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon\ , \text{ also } c - \left(-\frac{c}{2}\right) < c_n < c + \left(-\frac{c}{2}\right) \implies$$

$$\frac{3}{2}\cdot c < c_n < \frac{c}{2} < 0 \qquad ↯!$$

Ist speziell $a_n \leq d$, so ist $\lim a_n \leq \lim d = d$ (d als konstante Folge betrachtet).
Analoges gilt für $d \leq b_n$. ❑