Kapitel 3
Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Es seien a, b reelle Zahlen. Folglich gibt es Cauchyfolgen $(a_n), (b_n)$ in $\mathbb{Q}$, **3/2/9**
so daß $a = \langle a_n \rangle,\ b = \langle b_n \rangle$. Dann sei:

$$a \pm b = \langle a_n \rangle \pm \langle b_n \rangle \ \underset{\text{Df}}{=}\ \langle a_n \pm b_n \rangle \quad \text{für alle } n,$$

$$a \cdot b = \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle \ \underset{\text{Df}}{=}\ \langle a_n \cdot b_n \rangle \quad \text{für alle } n, \text{ und}$$

$$a < b \iff \langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle \ \underset{\text{Df}}{=}\ \langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle \text{ und } a_n < b_n \quad \text{für fast alle } n.$$

($\langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle$ bedeutet, daß (a_n) und (b_n) nicht grenzwertgleich sind.)

$$-\langle a_n \rangle \ \underset{\text{Df}}{=}\ \langle -a_n \rangle,$$

$$\frac{1}{\langle a_n \rangle} \ \underset{\text{Df}}{=}\ \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle; \qquad \text{Voraussetzung: } a_n \neq 0 \text{ und } (a_n) \text{ ist keine Nullfolge.}$$

Die Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Repräsentanten; dies bedeutet z.B. für die Addition:

Sind (a'_n) und (b'_n) andere Repräsentanten von a bzw. b, dann muß dies zum gleichen Ergebnis führen, d.h.,

wenn $(a_n) \sim (a'_n)$ und $(b_n) \sim (b'_n)$, so ist $(a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n)$.

Dies bedeutet dann nämlich, daß $\langle a_n + b_n \rangle = \langle a'_n + b'_n \rangle$, womit die gleiche reelle Zahl festgelegt ist.
Analog verfährt man mit den anderen Fällen.

Mit den so eingeführten Funktionen $+$ und $\cdot$ und der Relation $<$ bildet die Menge der reellen Zahlen (= Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen) einen archimedisch geordneten Körper, in dem das Intervallschachtelungsaxiom gilt. Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt! (Dies hätte natürlich alles bewiesen werden müssen.)