

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Abschließend betrachten wir noch Funktionenfolgen. Dazu sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in M definierte Funktion. Weiterhin sei auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert. 3/2/10

Definition. (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

(1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert an der Stelle $a \in M$ gegen b

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = b.$$

(2) (f_n) konvergiert in M gegen die Funktion f

$$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } a \in M \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$$

(d.h., für jedes fixierte $a \in M$ konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(a))$ gegen die Zahl $f(a)$; diese Art Konvergenz nennen wir auch *punktweise Konvergenz*).

$$\text{Bez.: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

(3) (f_n) konvergiert in M

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Es existiert eine Funktion } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ so daß } (f_n) \text{ in } M \text{ gegen } f \text{ konvergiert.}$