

Kapitel 3 Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Beispiel. Es sei $M = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$.

3/2/11

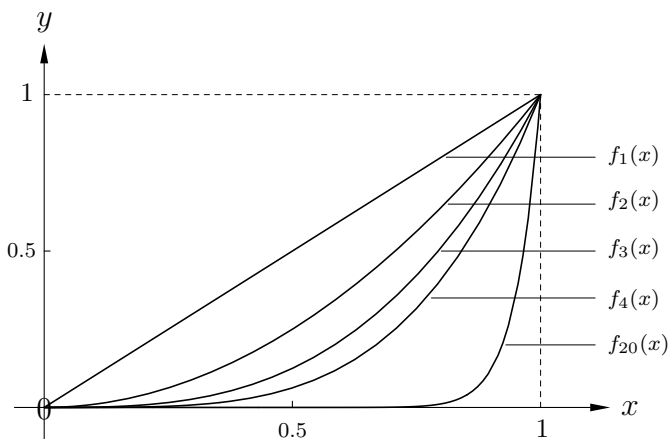


Abb. 3.1 zeigt die Konvergenz von Funktionenfolgen. Mit wachsendem n nähern sich die Funktionen $f_n(x)$ in dem Intervall $[0, 1)$ der x -Achse. Für $x = 1$ gilt stets $f_n(x) = 1$.

Für jedes fixierte $a \in [0, 1]$ mit $a < 1$ gilt offenbar $a^n \rightarrow 0$; für $a = 1$ ist $a^n = 1$, also $a^n \rightarrow 1$.

Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$