Kapitel 3
Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Die folgende Abbildung veranschaulicht, daß sich bei der gleichmäßigen Konvergenz für **3/2/13**
vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_n(x)$ von $f(x)$ an jeder Stelle $x \in M = [a, b]$ um weniger als ε unterscheiden, falls n hinreichend groß ist; man sagt dafür auch, daß die Funktionen $f_n(x)$ in dem ε-*Streifen* von $f(x)$ liegen.

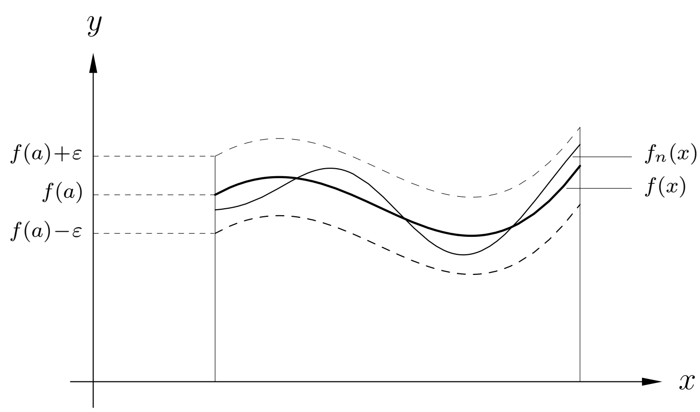

Abb. 3.1 veranschaulicht die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Der ε-Streifen von $f(x)$ ist durch die gestrichelten Kurven dargestellt.

Die im vorhergehenden Beispiel betrachtete Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ ist nicht gleichmäßig konvergent in $[0, 1]$.
Angenommen doch, dann gibt es für $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in [0, 1]$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{2}$. Dies gilt insbesondere für $m = n_0$ und für alle $x \in [0, 1)$; hier ist zusätzlich $f(x) = 0$. Also $|f_n(x)| < \dfrac{1}{2}$ für alle x mit $0 \leq x < 1$. Wir wählen jetzt x „hinreichend dicht“ bei 1; $x := 1 - \delta$ mit $\delta > 0$. Dann gilt nach der Bernoullischen Ungleichung: $x^m = (1-\delta)^m \geq 1 - m\,\delta$ (m fixiert). Sei δ so klein, daß $m\,\delta < \dfrac{1}{2}$, dann ist $\dfrac{1}{2} < x^m = |f_m(x) - f(x)| < \dfrac{1}{2}$ ↯!

In den späteren Abschnitten über Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen werden wir uns ausführlicher mit den Eigenschaften der Grenzfunktion befassen.