

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiel. (Geometrische Reihe)

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \dots + a^n$ ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \dots + a^n)(1-a) = 1 + \dots + a^n - (a + \dots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned} \quad 4/1/3$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$