Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.6 (*Leibniz–Kriterium*) **4/1/26**
Ist $\sum a_i$ *alternierend und* $\lim a_i = 0$ *und* $(|a_i|)_{i=0,1,2,\dots}$ *monoton fallend,*
dann ist $\sum a_i$ *konvergent.*

Beweis. Es sei o.B.d.A. $a_0 > 0$ (anderenfalls betrachten wir $a_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ und $a_1 > 0$). **4/1/27**
Weiterhin sei $|a_i| = \alpha_i\ (> 0)$. Dann ist $\lim \alpha_i = 0$ und $\sum a_i = \sum (-1)^i \cdot \alpha_i$.
Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
|S_{n+k} - S_n| &= \left|(-1)^{n+1}\alpha_{n+1} + \dots + (-1)^{n+k} \cdot \alpha_{n+k}\right| \\
&= \left|(-1)^{n+1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \dots + (-1)^{k-1}\alpha_{n+k})\right| \\
&= \underbrace{\left|(-1)^{n+1}\right|}_{=1} \cdot |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \dots + (-1)^{k-1}\alpha_{n+k}| \\
&= |\underbrace{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}} + \underbrace{\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}} \pm \dots + (-1)^{k-1}\alpha_{n+k}| \ := \ (\star)
\end{aligned}$$

In Abhängigkeit von k ist die Anzahl der Summanden α_i in $(\star)$ gerade bzw. ungerade. Nach Voraussetzung ist die Folge (α_i) monoton fallend, also $\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} \geq 0, \dots$. Ist k gerade, dann kann man die Summanden in $(\star)$ paarweise zusammenfassen, und es ist

$$(\star\star) := (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}) + \dots + (\alpha_{n+k-1} - \alpha_{n+k}) \geq 0.$$

Ist k ungerade, dann bleibt bei der paarweisen Zusammenfassung α_{n+k} übrig, aber α_{n+k} ist offensichtlich nicht negativ. Folglich ist auch in diesem Fall $(\star\star) \geq 0$.
Andererseits ist

$$(\star\star) = \alpha_{n+1} - \underbrace{(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(\qquad)}_{\geq 0} \ \leq \ \alpha_{n+1}.$$

Insgesamt gilt also

$$0 \leq (\star\star) \leq \alpha_{n+1} \quad \text{und damit} \quad |S_{n+k} - S_n| = |(\star\star)| \leq \alpha_{n+1}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\alpha_n \to 0$ gibt es ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$:
$|S_{n+k} - S_n| \leq \alpha_{n+1} < \varepsilon$. $\Longrightarrow$ $(S_n) = \sum a_i$ ist konvergent. ❏