Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiele.

5. Beispiel dafür, wie der junge Leibniz 1672 in Paris – er sollte dort seine „Rechenkünste“ unter Beweis stellen – mit falschen Hilfsmitteln den richtigen Wert einer Reihe berechnet hat (vgl. Wußing, H. und Wolfgang Arnold. Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1975, S. 212). **4/1/30/5**

Gegeben ist die Reihe $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{1+\cdots+n} + \cdots$.

Man berechne den Wert der Reihe.

Ansatz von Leibniz:

Sei $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ (harmonische Reihe; nicht konvergent!) und

$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$. Dann ist (nach Leibniz):

$$\begin{aligned} B - 1 + \frac{1}{2}A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)}_{=\frac{1}{3}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right)}_{=\frac{1}{4}} + \cdots \\ &= B. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$B - 1 + \frac{1}{2}A = B \quad \text{und damit} \quad A = 2.$$

Erstaunlicherweise stimmt der Wert. Die Methoden sind aber fehlerhaft, da mit divergenten Reihen so umgegangen wurde, als wären sie konvergent.

Es soll jetzt noch eine exakte Lösung gegeben werden.

Es ist (nach Gauß 1777 – 1855)

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right). \end{aligned}$$

Es ist $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$; also

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{0} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{0} - \cdots \underbrace{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{0} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2. \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+\cdots+i} = 2.$$