

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Satz 4.9 (Wurzelkriterium)

4/1/35

Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

- (1) Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,
dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
- (2) Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i , dann ist $\sum a_i$ divergent.

Beweis. (1). Es sei $0 < q < 1$ und $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q \implies |a_i| \leq q^i$.

4/1/36

$\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ ist eine konvergente Majorante von $\sum |a_i|$ (geometrische Reihe). Folglich ist $\sum |a_i|$

(nach dem Majorantenkriterium) konvergent, und damit ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2). Sei $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$. Dann ist $|a_i| \geq 1$ und daher (a_i) keine Nullfolge. Folglich ist $\sum a_i$ divergent. \square