

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Bemerkung. Für die Anwendung des Wurzelkriteriums genügt es, daß $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ für fast alle i . (Offenbar folgt aus $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$ sofort $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$.)

Ist andererseits (a_i) beschränkt und $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} := c < 1$, so ist $\sqrt[i]{|a_i|} \leq \underbrace{c + \frac{1-c}{2}}_{:= q < 1}$ für

fast alle i ; folglich ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Ist also $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$, so ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

4/1/37

Analog erhält man: Wenn $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für fast alle i , so ist $\sum a_i$ divergent.

Achtung: Für die Konvergenz von $\sum a_i$ reicht es noch nicht, daß stets $\sqrt[i]{|a_i|} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = 1$) ist;

z.B. für $a_i = \frac{1}{i}$ ist $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} < 1$, denn $\frac{1}{i} < 1$ (bzw. $\overline{\lim} \frac{1}{i} = 1$). Aber $\sum \frac{1}{i}$ ist nicht konvergent.

Wenn $\lim \sqrt[i]{|a_i|}$ existiert, dann ist offenbar $\overline{\lim} \sqrt[i]{|a_i|} = \lim \sqrt[i]{|a_i|}$, und man rechnet nur mit dem Limes.