

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.1 Konvergenz von Reihen

**Satz 4.10** (Quotientenkriterium)

4/1/38

Es sei  $a_i \neq 0$  für jedes  $i$ . Dann gilt:

- (1) Existiert ein  $q$  mit  $0 < q < 1$ , so daß für jedes  $i$  gilt:  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ ,  
dann ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.
- (2) Ist  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für jedes  $i$ , dann ist  $\sum a_i$  divergent.

**Beweis.** (1). Sei  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \leq q$ . Dann ist  $|a_{i+1}| \leq q \cdot |a_i|$  für alle  $i$ , folglich gilt

4/1/39

$$|a_i| \leq q \cdot |a_{i-1}| \leq q^2 \cdot |a_{i-2}| \leq \cdots \leq q^i \cdot |a_0|.$$

Damit ist  $\sum |a_0| \cdot q^i = |a_0| \cdot \sum q^i$  eine konvergente Majorante von  $\sum |a_i|$ , folglich ist  $\sum a_i$  absolut konvergent.

(2). Sei jetzt  $\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| \geq 1$  für alle  $i$ . Dann ist  $|a_{i+1}| \geq |a_i| \geq \cdots \geq |a_0|$  und  $|a_0| > 0$  (nach Voraussetzung). Folglich ist  $(a_i)$  keine Nullfolge und damit  $\sum a_i$  divergent.  $\square$