Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiele.

1. Sei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$, $a \neq 0$, also $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$.

Hier bietet sich das Wurzelkriterium an. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|^n} = \sqrt[n]{\left|\frac{a}{n}\right|^n} = \left|\frac{a}{n}\right| \leq q < 1$$ **4/1/41**

für fast alle n; z.B. $q = \dfrac{1}{2}$ leistet das Verlangte.

Benutzt man für dasselbe Beispiel das Quotientenkriterium, dann wird die Berechnung komplizierter. Es ist (vgl. auch Beispiel 3/1/35)

$$\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n}{n^n}}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{a^n}\right| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = |a| \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} := (\star).$$

Wir wissen schon, daß $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 2$, also $\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \dfrac{1}{2}$, folglich ist

$(\star) \leq |a| \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n+1} \leq q < 1$ für fast alle n (z.B. für $q = \dfrac{1}{2}$).