Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

5. Wir betrachten jetzt ein Beispiel für eine Reihe, bei der das Quotientenkriterium versagt (das Wurzelkriterium ließe sich anwenden). **4/1/45**

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \cdots =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots .$$

Folglich ist $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt für alle geraden n: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und folglich $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2.$

Die Reihe ist aber konvergent, denn es ist $S_k = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k$ für gerade k und damit $S_k = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2.$

Für beliebige k ist (S_k) monoton wachsend und beschränkt, also auch konvergent.