

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

**Satz 4.12** Eine absolut konvergente Reihe konvergiert unbeding und zwar immer gegen denselben Wert. 4/2/9

(D.h., für absolut konvergente Reihen gilt das allgemeinste Kommutativgesetz.)

**Beweis.** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent,  $\sum a_n = a$  und  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Permutation von  $\mathbb{N}$ . 4/2/10

Behauptung:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$  konvergiert gegen  $a$ .

z.z.: Für  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n^*$ , so daß für jedes  $n \geq n^*$  gilt:  $|a_{f(0)} + \dots + a_{f(n)} - a| < \varepsilon$ .  
Es sei

$$S_m = \sum_{n=0}^m a_n, \quad S'_m = \sum_{n=0}^m a_{f(n)} \quad \text{und} \quad S''_m = \sum_{n=0}^m |a_n|.$$

Nach Voraussetzung ist  $(S''_m)$  konvergent. Folglich gilt nach dem Cauchy-Kriterium: Es existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und jedes  $k \geq 1$ :

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da  $k$  beliebig ist, erhält man daraus für je endlich viele  $n_1, \dots, n_l$ , die sämtlich größer als  $n_0$  sind:

$$|a_{n_1}| + \dots + |a_{n_l}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Voraussetzung gilt weiterhin: Es existiert ein  $m_0$ , so daß für jedes  $n \geq m_0$ :

$$|S_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei  $k_0 = \{n_0, m_0\}$ . Da  $f$  eine Permutation von  $\mathbb{N}$  ist, kommen  $0, 1, \dots, k_0$  unter den Elementen  $f(0), f(1), f(2), \dots$  vor. Sei nun  $n^*$  so groß gewählt, daß  $0, 1, \dots, k_0$  schon unter den Elementen  $f(0), \dots, f(n^*)$  vorkommen.

g.z.z.: für  $m \geq n^*$  gilt:  $|S'_m - a| < \varepsilon$ .

$$S'_m = a_{f(0)} + \dots + a_{f(m)} = a_0 + \dots + a_{k_0} + a_{f(i_1)} + \dots + a_{f(i_l)};$$

wobei  $\{f(i_1), \dots, f(i_l)\} = \{f(0), \dots, f(m)\} \setminus \{0, \dots, k_0\}$ ; insbesondere ist  $f(i_j) > k_0$  für  $j = 1, \dots, l$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} |S'_m - a| &= |a_0 + \dots + a_{k_0} + a_{f(i_1)} + \dots + a_{f(i_l)} - a| \\ &\leq |a_0 + \dots + a_{k_0} - a| + |a_{f(i_1)} + \dots + a_{f(i_l)}| \end{aligned}$$

$$\leq \underbrace{|S_{k_0} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{f(i_1)}| + \cdots + |a_{f(i_l)}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon. \quad \square$$