Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Satz 4.13 (*Umordnungssatz von Riemann*) **4/2/11**
Ist $\sum a_n$ *konvergent und nicht absolut konvergent, dann existiert für jedes* $c \in \mathbb{R}$ *bzw. für* $c = \pm\infty$ *eine Umordnung* $\sum b_i$ *von* $\sum a_n$*, so daß* $\sum b_i = c$*.*

Beweis. Die Konvergenz von $\sum a_n$ bewirkt, daß $a_n \to 0$. **4/2/12**
Setzt man

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & \text{für } a_n \geq 0, \\ 0 & \text{für } a_n < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad a_n^- := \begin{cases} -a_n & \text{für } a_n \leq 0, \\ 0 & \text{für } a_n > 0, \end{cases}$$

dann ist offenbar

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{und} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^- .$$

Da $\sum a_n$ nicht absolut konvergiert, sind die beiden Reihen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$ divergent. Wären beide Reihen konvergent, so ist wegen $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ nach Satz 4.4 auch $\sum |a_n|$ konvergent. ↯!
Wäre eine der beiden Reihen konvergent, etwa $\sum a_n^+$ und die andere divergent, so erhält man wiederum nach Satz 4.4 aus $a_n^- = a_n^+ - a_n$ die Konvergenz von $\sum a_n^-$; hieraus ergibt sich erneut ein Widerspruch.
Da a_n^+ und a_n^- stets nicht negativ sind, divergieren beide Reihen bestimmt gegen $+\infty$. Dies nutzen wir aus, um die Behauptung des Umordnungssatzes zu beweisen.

Es sei zunächst $c \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$ (den Fall $c < 0$ behandelt man analog). Induktiv definiert man Folgen $\left(S_{n_\nu}\right)$, $\left(S'_{m_\nu}\right)$, deren Glieder aus je endlich vielen ausgewählten Summanden von $\sum a_n^+$ bzw. $\sum a_n^-$ bestehen. Wir geben hier nur an, wie man vom nullten zum ersten Folgenglied kommt, der eigentliche Induktionsschritt ist daraus klar ersichtlich.

1. Es seien $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{i=0}^{n_0-1} a_i^+ \leq c < \sum_{i=0}^{n_0} a_i^+ := S_{n_0} \quad \text{und}$$

$$S_{n_0} - \sum_{i=0}^{m_0-1} a_i^- \geq c > S_{n_0} - \sum_{i=0}^{m_0} a_i^- := S'_{m_0}.$$

2. Für den nächsten Schritt seien $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$S'_{m_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n_1-1} a_i^+ \leq c < S'_{m_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i^+ := S_{n_1} \quad \text{und}$$

$$S_{n_1} - \sum_{i=m_0+1}^{m_1-1} a_i^- \geq c > S_{n_1} - \sum_{i=m_0+1}^{m_1} a_i^- := S'_{m_1}.$$

Bei jedem Schritt wird wenigstens ein Glied aus jeder der beiden Reihen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$ verbraucht.

Wir betrachten jetzt die folgende Umordnung der Ausgangsreihe $\sum a_n$ (wobei die aufgrund der Definition von a_i^+ und a_i^- „künstlich" eingeführten Nullen ersatzlos gestrichen werden können, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern):

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i = a_0^+ + \cdots + a_{n_0}^+ - a_0^- - \cdots - a_{m_0}^- +$$
$$a_{n_0}^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_{m_0}^- - \cdots - a_{m_1}^- \pm \cdots$$

und beweisen, daß $\sum\limits_{i=0}^{\infty} = c$.

Aus der Definition von $\left(S_{n_\nu}\right)$, $\left(S'_{m_\nu}\right)$ folgt unmittelbar, daß stets

$$0 < S_{n_\nu} - c < a_{n_\nu}^+ \quad \text{und} \quad 0 < c - S'_{m_\nu} < a_{m_\nu}^-.$$

Wegen $a_n \to 0$ ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{n_\nu} = c = \lim\limits_{\nu\to\infty} S'_{m_\nu}$.

Ist $S_n^\star := \sum\limits_{i=0}^{n} b_i$ eine beliebige Partialsumme von $\sum b_i$, dann gibt es offenbar ein $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$S'_{m_k} \leq S_n^\star \leq S_{n_k} \quad \text{oder} \quad S'_{m_k} \leq S_n^\star \leq S_{n_{k+1}}.$$

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^\star = c = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$.

Es sei jetzt $c = \infty$ (für $c = -\infty$ verläuft der Beweis analog).

Wegen $a_n \to 0$ ist $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ für fast alle n. Es genügt eine Umordnung $\sum b_i$ von $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ anzugeben, die bestimmt gegen ∞ divergiert; die fehlenden Summanden $a_0, \ldots, a_k$ können an den Anfang der Reihe gesetzt werden, ohne das Divergenzverhalten der Reihe zu beeinflussen. (Aus technischen Gründen werden auch hier wieder, wie im vorhergehenden Fall, Nullen eingefügt, die man ersatzlos streichen kann.)

Es ist $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{n+k}}_{:=d_n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$.

Sei n_0 die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$U_0 := \sum_{i=0}^{n_0} d_i^+ \geq \frac{3}{2}$$

und n_1 die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$U_1 := \sum_{i=n_0+1}^{n_1} d_i^+ \geq \frac{3}{2} \quad \text{usw.}$$

Solche Zahlen gibt es, da $\sum d_i^+$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

Wegen $|d_i| \leq \frac{1}{2}$ für alle i ist stets $U_i - d_i^- \geq 1$.

Die Umordnung

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i := d_o^+ + \cdots + d_{n_0}^+ - d_0^- + d_{n_0+1}^+ \cdots + d_{n_1}^+ - d_1^- \pm \cdots$$

$$= U_0 - d_0^- + U_1 - d_1^- \pm \cdots$$

leistet das Verlangte. Denn ist $S_m = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ eine beliebige Partialsumme von $\sum b_i$, dann gibt es offenbar ein maximales $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$S_m = U_0 - d_0^- + \cdots + U_k - d_k^- \quad \text{oder}$$

$$S_m = U_0 - d_0^- + \cdots + U_k - d_k^- + d_{k+1}^+ + \cdots + d_m^+.$$

Wegen $d_i^+ \geq 0$ ist $S_m \geq k+1$. Hieraus folgt schließlich $S_m \to \infty$. ❑