

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Satz 4.14 (Multiplikation unendlicher Reihen)

4/2/13

Voraussetzungen:

(1) Es seien $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum a_m = a$, $\sum b_n = b$.

(2) f sei eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(Die Existenz einer solchen Bijektion weist man mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren nach).

(3) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $f(i) = (m_i, n_i)$ und $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Behauptung:

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ ist absolut konvergent, und es ist $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = a \cdot b$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\sum c_i$ absolut konvergiert.

4/2/14

g.z.z.: Die Folge der Partialsummen von $\sum |c_i|$ ist nach oben beschränkt.

Nach Voraussetzung existiert für jedes $i \in \mathbb{N}$ genau ein Paar $(m_i, n_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so daß $f(i) = (m_i, n_i)$, also $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Wir bilden

$$S_k := \sum_{i=0}^k |c_i| = \sum_{i=0}^k |a_{m_i} b_{n_i}| := (\star).$$

Sei $l = \max\{m_0, \dots, m_k, n_0, \dots, n_k\}$. Die Summanden aus (\star) kommen unter den Summanden aus $|a_0 b_0| + \dots + |a_i b_j| + \dots + |a_l b_l|$ vor, wobei $i, j \leq l$.

Dann ist

$$\begin{aligned} S_k = (\star) &\leq |a_0 b_0| + \dots + |a_i b_j| + \dots + |a_l b_l| \\ &= \underbrace{\left(|a_0| + \dots + |a_l|\right)}_{:= S'_l} \cdot \underbrace{\left(|b_0| + \dots + |b_l|\right)}_{:= S''_l} = S'_l \cdot S''_l. \end{aligned}$$

Da $\sum |a_i|$, $\sum |b_i|$ nach Voraussetzung konvergieren, sind (S'_n) , (S''_n) beschränkt. Folglich ist $(S'_n \cdot S''_n)$ beschränkt und somit ist auch (S_k) beschränkt. Hieraus ergibt sich die Konvergenz von $\sum |c_i|$ und damit die absolute Konvergenz von $\sum c_i$.

Behauptung: $\sum c_i = a \cdot b$.

Da $\sum c_i$ absolut konvergiert, ist jede Umordnung von $\sum c_i$ ebenfalls konvergent und zwar gegen den gleichen Wert.

Wir betrachten eine spezielle Umordnung und Zusammenfassung bestimmter Summanden:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} c_i &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{m_i} b_{n_i} = \underbrace{a_0 b_0}_{:= c'_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0)}_{:= c'_1} + \cdots + \\
&\quad \underbrace{(a_0 b_i + a_1 b_i + \cdots + a_i b_i + a_i b_{i-1} + \cdots + a_i b_0)}_{:= c'_i} + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} c'_i.
\end{aligned}$$

Es seien

$$S_n^* = \sum_{i=0}^n c'_i, \quad S_n^{**} = \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{und} \quad S_n^{***} = \sum_{i=0}^n b_i.$$

Dann gilt für die oben angegebene Umordnung: $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***}$.
Wegen $S_n^{**} \rightarrow a$, $S_n^{***} \rightarrow b$ gilt $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***} \rightarrow a \cdot b$, also

$$\sum c_i = a \cdot b = \left(\sum a_m \right) \cdot \left(\sum b_n \right). \quad \square$$