

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Beispiel.

4/2/18

Das Cauchyprodukt von absolut konvergenten Reihen ist wieder absolut konvergent.

Es sei $|a| < 1$. Dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ absolut konvergent und $\sum a^i = \frac{1}{1-a}$.

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a^i}_{=\frac{1}{1-a}} \right) \cdot \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a^j}_{=\frac{1}{1-a}} \right) = \frac{1}{(1-a)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \underbrace{a^i a^j}_{a^n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \left(\underbrace{\sum_{i+j=n} 1}_{=n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n. \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Offenbar ist $|n \cdot a^n| \leq |(n+1) \cdot a^n|$. Folglich ist $\sum (n+1)|a|^n$ eine konvergente Majorante von $\sum n|a|^n$. Dann ist $\sum n \cdot a^n$ absolut konvergent, und damit gilt

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n}_{=\frac{1}{(1-a)^2}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a^n}_{=\frac{1}{1-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n.$$

Folglich ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{1 - (1-a)}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Auf diese Weise erhält man neue Beispiele für absolut konvergente Reihen.