Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Wir befassen uns jetzt noch kurz mit sogenannten *Doppelreihen.* Dazu sei **4/2/19**

$$(a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

eine „unendliche Matrix“. Eine Matrix dieser Art nennen wir auch *Doppelfolge*. Die *Doppelfolge* (a_{mn}) *konvergiert* gegen a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_{mn} - a| < \varepsilon$. **Bez.:** $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$

Es sei jetzt

$$S_{mn} := \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} = (a_{00} + \cdots + a_{0n}) + (a_{10} + \cdots + a_{1n}) + \cdots + (a_{m0} + \cdots + a_{mn}).$$

Dann heißt (analog wie bei der Definition von Reihen) die Doppelfolge (S_{mn}) auch *Doppelreihe*.

Bez.: $(S_{mn}) := \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$

Die *Doppelreihe konvergiert* gegen a, wenn (S_{mn}) gegen a konvergiert.

Bez.: $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = a$

Es erhebt sich nun die Frage, ob man den Limes $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn}$ (falls er existiert) auch so berechnen kann, indem man zunächst die Zeilensummen $b_i := \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ bildet und anschließend die unendliche Summe der b_i betrachtet (falls diese Reihen konvergieren; eine entsprechende Frage könnte auch für die Spaltensummen gestellt werden). Unter gewissen Voraussetzungen kann der Limes tatsächlich so bestimmt werden. Aufschluß darüber gibt der folgende Satz.