

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Beweis. Sei $|b_\nu| = \beta_\nu$. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum \beta_\nu$; es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = \beta$. 4/2/21
Wegen $\beta_\nu \geq 0$ ist die Summe je endlich vieler $\beta_{\nu_1}, \dots, \beta_{\nu_k}$ stets $\leq \beta$. Damit erhält man

(1). $\sum_{j=0}^n \underbrace{|a_{ij}|}_{=\beta_\nu} \leq \beta$ für alle n . Folglich ist $Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.

(2). Weiterhin ist $\sum_{i=0}^m |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m . Damit ist auch $S_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.

(3). Es ist auch $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m, n .

Nach Behauptung (1) existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| := \alpha_i$. Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |a_{ij}|}_{\leq \beta} = \sum_{i=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Weiterhin ist

$$|Z_i| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=0}^n a_{ij} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \alpha_i.$$

Also gilt stets

$$\sum_{i=0}^m |Z_i| \leq \sum_{i=0}^m \alpha_i \leq \beta.$$

Folglich ist $\sum Z_i$ absolut konvergent.

Analog zeigt man die absolute Konvergenz von $\sum S_j$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Voraussetzung bzw. nach den obigen Ausführungen natürliche Zahlen n_1, n_2 , so daß für alle $n \geq n_1$ und alle $k \geq 0$ gilt:

$$|b_1 + \dots + b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \\ \beta_{n_2+1} + \dots + \beta_{n_2+k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

Sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. In der Aufzählung $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n_0)$ kommen nur endlich viele Paare $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vor. Folglich existiert ein m_0 , so daß $\varphi(0), \dots, \varphi(n_0)$ schon in der Menge $\{(i, j) : i \leq m_0, j \leq m_0\}$ auftreten.

Wählt man $m, n \geq m_0$, dann ist

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| = |b_1 + \dots + b_{n_0} - b + r|,$$

wobei r eine endliche Summe ist, die aus gewissen Gliedern $a_{ij} := b_\nu$ besteht, deren Indizes ν größer als n_0 sind.

Wegen (\star) folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also erhält man für alle $m, n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - b \right| \leq |b_1 + \cdots + b_{n_0} - b| + |r| < \varepsilon. \quad (\star\star)$$

Für $n \rightarrow \infty$ in $(\star\star)$ erhält man

$$\left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - b \right| = \left| \sum_{i=0}^m Z_i - b \right| \leq \varepsilon.$$

(Die Konvergenz der inneren Reihe ist schon nachgewiesen.)

Für $m \rightarrow \infty$ entsteht

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} Z_i - b \right| \leq \varepsilon \implies \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = b.$$

Wegen $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}$ erhält man aus $(\star\star)$ analog

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} S_j - b \right| \leq \varepsilon \implies \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b. \quad \square$$