

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.3 Komplexe Zahlen

**Satz 4.17** Für komplexe Zahlen  $z, z_1, z_2$  gilt:

4/3/8

- (1)  $|z| \geq 0$ , und  $|z| = 0 \iff z = 0$ ,
- (2)  $|-z| = |z|$ , ( $\implies |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ )
- (3)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ , ( $\implies |z^n| = |z|^n$ )
- (4)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , falls  $z_2 \neq 0$ ,
- (5)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,
- (6)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

**Beweis.** (1). Sei  $z = a + ib$ . Dann gilt

4/3/9

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$$

(2). Trivial!

(3). Sei  $z_n = a_n + ib_n$ ,  $n = 1, 2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |a_1a_2 + i^2 \cdot b_1b_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2| \\ &= |a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)| \\ &= \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1b_2b_1a_2 + b_1^2a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(b_2^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

(4). Es genügt zu zeigen:  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ , denn

$$\left| \frac{u}{z} \right| = \left| u \cdot \frac{1}{z} \right| = |u| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = |u| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{|u|}{|z|}.$$

Wir wissen schon, daß für  $z = a + ib$  und  $c := a^2 + b^2$  gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{c} + i \frac{-b}{c} \implies$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

(5). Es sei  $z_n = a_n + ib_n$ ,  $n = 1, 2$ . Dann ist die linke Seite  $ls$  von (5):

$$ls := |a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2| = |a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

und die rechte Seite  $rs$  ist:

$$rs := |a_1 + ib_1| + |a_2 + ib_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Offenbar sind  $ls, rs \geq 0$ . Folglich ist

$$ls \leq rs \iff ls^2 \leq rs^2 \iff$$

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2) + 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + (a_2^2 + b_2^2) \iff$$

$$2 \underbrace{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}_{:= (\star)} \leq 2 \cdot \underbrace{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}_{:= (\star\star)}.$$

Ist  $(\star) < 0$ , dann gilt offenbar die letzte Ungleichung und damit  $ls \leq rs$ .

Es sei jetzt  $(\star) \geq 0$ . dann ist

$$(\star) \leq (\star\star) \iff (\star)^2 \leq (\star\star)^2 \iff$$

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \iff$$

$$a_1^2 a_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 \leq a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 \iff$$

$$0 \leq (a_1 b_2)^2 - 2a_1 b_2 b_1 a_2 + (b_1 a_2)^2 = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2.$$

Damit gilt insgesamt  $ls \leq rs$ .

(6). Der Beweis hierzu erfolgt durch ähnliche Überlegungen.  $\square$