Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.3 Komplexe Zahlen

Satz 4.18 $(z_n) = (a_n + ib_n)$ *konvergiert gegen* $z = a + ib$ *gdw* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$. **4/3/12**
(Konvergenz in $\mathbb{C}$ bedeutet also komponentenweise Konvergenz.)

Beweis. Es ist $|z_n - z| = |a_n + ib_n - (a + ib)| = |a_n - a + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + \underbrace{|i|}_{=1} \cdot |b_n - b|$. **4/3/13**

$(\longleftarrow)$ Wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Folglich ist

$$|z_n - z| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad z_n \to z.$$

$(\longrightarrow)$ $|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$ (für fast alle n) $\Longrightarrow$

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \quad \Longrightarrow$$

$$(a_n - a)^2,\ (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \quad \Longrightarrow$$

$$|a_n - a|,\ |b_n - b| < \varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$a_n \to a, \quad b_n \to b. \qquad \square$$