

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.23 (Produkt von Potenzreihen)

4/5/2

Es seien $\sum a_n(x-a)^n$ und $\sum b_n(x-a)^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien ϱ_1 bzw. ϱ_2 , und es sei $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ ($= \sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}$). Dann gilt:

(1) Die Potenzreihe $\sum c_n(x-a)^n$ hat einen Konvergenzradius $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

(2) Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Beweis. Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen absolut; folglich läßt sich ihr Cauchyprodukt bilden (vgl. Satz 4.14), das auch wenigstens dort absolut konvergiert. Also $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ und

4/5/3

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu(x-a)^\nu \cdot b_{n-\nu}(x-a)^{n-\nu} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu} \cdot (x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n \cdot \underbrace{\sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}}_{=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n. \end{aligned}$$

Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ konvergiert $\sum c_n(x-a)^n$ absolut (vgl. Satz 4.14). \square