Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.25 (*Identitätssatz für Potenzreihen*) **4/5/6**

Voraussetzungen:

(1) *Es seien* $\sum a_n(x-a)^n$ *und* $\sum b_n(x-a)^n$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* ϱ_1 *bzw.* ϱ_2 *und* $\varrho_1,\ \varrho_2 > 0$.

(2) (x_ν) *sei eine Folge mit* $x_\nu \neq a,\ \lim x_\nu = a$ *und* $|x_\nu - a| < \varrho_1,\ \varrho_2$.

(3) *Für jedes* $\nu \in \mathbb{N}$ *gilt*: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$.

Behauptung: *Für jedes* n *ist* $a_n = b_n$.

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten x_ν überein und ist der Mittelpunkt a der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)

Lemma. *Es sei* $\sum c_n(x-a)^n$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $\varrho > 0$, *und sei* (x_ν) *eine Folge mit* $x_\nu \neq a,\ |x_\nu - a| < \varrho$ *und* $\lim x_\nu = a$. **4/5/7/2**

Dann ist $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.