Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Lemma. *Es sei* $\sum c_n(x-a)^n$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $\varrho > 0$, *und sei* (x_ν) *eine Folge mit* $x_\nu \neq a$, $|x_\nu - a| < \varrho$ *und* $\lim x_\nu = a$. **4/5/7/2**

Dann ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $|x_\nu - a| < \varrho$. Wegen $x_\nu \to a$ existiert ein n_0, so daß für alle $\nu \geq n_0$ gilt: $|x_\nu - a| < \dfrac{\varrho}{2} < \varrho$. **4/5/7/3**

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergieren, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|c_n\left(\dfrac{\varrho}{2}\right)^n\right|$ konvergent. Damit ist offenbar auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|c_n\left(\dfrac{\varrho}{2}\right)^{n-1}\right|$ konvergent.

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|c_n\left(\dfrac{\varrho}{2}\right)^{n-1}\right| < c$.

Für $\varepsilon > 0$ existiert ein m_0, so daß für alle $\nu \geq m_0$ gilt: $|x_\nu - a| < \dfrac{\varepsilon}{c}$.

Ist $k_0 = \max\{m_0, n_0\}$ und $\nu \geq k_0$, dann ist

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n - c_0\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |(x_\nu - a)^n| =$$

$$|x_\nu - a| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \underbrace{|x_\nu - a|}_{< \frac{\varrho}{2}}{}^{n-1} \leq |x_\nu - a| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n-1}}_{< c} < c \cdot \underbrace{|x_\nu - a|}_{< \frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon.$$

Also

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0. \qquad ❏$$