

## Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

### 4.5 Rechnen mit Potenzreihen

**Satz 4.25** (Identitätssatz für Potenzreihen)

4/5/6

Voraussetzungen:

- (1) Es seien  $\sum a_n(x-a)^n$  und  $\sum b_n(x-a)^n$  Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  und  $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ .
- (2)  $(x_\nu)$  sei eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $\lim x_\nu = a$  und  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$ .
- (3) Für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$ .

Behauptung: Für jedes  $n$  ist  $a_n = b_n$ .

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten  $x_\nu$  überein und ist der Mittelpunkt  $a$  der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)

**Beweis.**

4/5/7/1

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zunächst einen Hilfssatz.

**Lemma.** Es sei  $\sum c_n(x-a)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\varrho > 0$ , und sei  $(x_\nu)$  eine Folge mit  $x_\nu \neq a$ ,  $|x_\nu - a| < \varrho$  und  $\lim x_\nu = a$ .

4/5/7/2

Dann ist  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$ .

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist  $|x_\nu - a| < \varrho$ . Wegen  $x_\nu \rightarrow a$  existiert ein  $n_0$ , so daß für alle  $\nu \geq n_0$  gilt:  $|x_\nu - a| < \frac{\varrho}{2} < \varrho$ .

4/5/7/3

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergieren, ist

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\frac{\varrho}{2})^n|$  konvergent. Damit ist offenbar auch  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\frac{\varrho}{2})^{n-1}|$  konvergent.

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\frac{\varrho}{2})^{n-1}| < c$ .

Für  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $m_0$ , so daß für alle  $\nu \geq m_0$  gilt:  $|x_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{c}$ .

Ist  $k_0 = \max\{m_0, n_0\}$  und  $\nu \geq k_0$ , dann ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n - c_0 \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |(x_\nu - a)^n| = \\ &= |x_\nu - a| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \underbrace{|x_\nu - a|^{n-1}}_{< \frac{\varrho}{2}} \leq |x_\nu - a| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n-1}}_{< c} < c \cdot \underbrace{|x_\nu - a|}_{< \frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n = c_0. \quad \square$$

Wir setzen nun den Beweis von Satz 4.25 fort.

4/5/7/4

Es sei  $c_n = a_n - b_n$ .

g.z.z.:  $c_n = 0$  für jedes  $n$ .

Für alle  $x_\nu$  mit  $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$  gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_\nu - a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x_\nu - a)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot (x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt induktiv, daß  $c_n = 0$  für alle  $n$ .

1.  $n = 0$ .

Es ist  $0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n \implies 0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n = c_0$ .

2. Es gelte schon  $c_0 = \dots = c_k = 0$ .

3. Behauptung:  $c_{k+1} = 0$ .

Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_\nu - a)^{n+k+1} \\ &= (x_\nu - a)^{k+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_\nu - a)^n. \end{aligned}$$

Aus  $x_\nu - a \neq 0$  folgt

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_\nu - a)^n.$$

Analog wie für  $n = 0$  gilt hier auch  $c_{0+k+1} = c_{k+1} = 0$ .  $\square$