Kapitel 4
Unendliche Reihen; Potenzreihen

Wir betrachten zunächst die (formale) unendliche Summe **4/0/0**

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

und setzen $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ für $n \geq 0$. Dadurch entsteht eine Folge (S_n) von endlichen Summen, die wir für die Definition von unendlichen Reihen benutzen.

Definition. (*Reihe*) **4/0/1**
Es sei $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ eine Folge von reellen Zahlen.
Die Folge $(S_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ mit $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ heißt *Folge der Partialsummen* von (a_n) oder *unendliche Reihe* (kurz *Reihe*).

$$\textbf{Bez.:}\ (S_n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum a_i$$

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert* (*gegen* a) $\underset{\text{Df}}{\equiv}$ (S_n) konvergiert (gegen a).

$$\textbf{Bez.:}\ \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes der Reihe.*

Bemerkung. $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ist doppeldeutig, es bezeichnet die Folge der Partialsummen von **4/1/1** (a_n) und den Wert der Reihe, falls sie konvergiert. Dies wird im praktischen Umgang aber nicht zu Verwechslungen führen.

Definition. (*Divergenz von Reihen*) **4/1/2**
$\sum a_i$ ist *divergent* $\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $\sum a_i$ ist nicht konvergent.

Beispiel. (**Geometrische Reihe**) **4/1/3**
Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.
Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$ ist

$$S_n(1-a) = (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1})$$

$$= 1 - a^{n+1}.$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n-ten Partialsumme berechnet.
Wegen $\lim a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}(1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

Satz 4.1 *$\sum a_i$ konvergiert gegen a gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|S_n - a| < \varepsilon$.* **4/1/4**

Beweis. Trivial; die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition einer Reihe und der Konvergenz von Folgen. ❏ **4/1/5**

Satz 4.2 (*Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen*) **4/1/6**
$\sum a_i$ ist konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $m, n > n_0$ gilt: $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen. ❏ **4/1/7**

Korollar 1. *$\sum a_i$ konvergiert gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $k \geq 1$ gilt: $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.* **4/1/8**

Beweis. Sei $m = n + k$ (in Satz 4.2). Dann gilt: **4/1/9**

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k} - (a_1 + \cdots + a_n)| \\ &= |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. ❏

Korollar 2. *Wenn $\sum a_i$ konvergiert, dann ist $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$.* **4/1/10**

Beweis. Setzt man in dem vorhergehenden Korollar $k = 1$, dann ist $|a_{n+1}| < \varepsilon$ für jedes $n \geq n_0$. Damit gilt $a_{n+1} \to 0$, also $a_i \to 0$. ❑ **4/1/11**

Korollar 3. *Ist* (a_i) *keine Nullfolge, so ist* $\sum a_i$ divergent. **4/1/12**

Beweis. Kontraposition von Korollar 2! ❑ **4/1/13**

Beispiel. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ist nicht konvergent, da $\big((-1)^n\big)$ keine Nullfolge ist. **4/1/14**

Definition. (*absolute Konvergenz*) **4/1/15**
$\sum a_i$ ist *absolut konvergent* $\underset{\text{Df}}{=}$ $\sum |a_i|$ ist konvergent.

Satz 4.3 *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.* **4/1/16**

Beweis. Sei $\sum |a_i|$ konvergent und $\varepsilon > 0$. **4/1/17**
Dann existiert nach Korollar 1 ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ und $k \geq 1$: $\Big||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|\Big| < \varepsilon$. Also

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Folglich ist auch $\sum a_i$ konvergent. ❑

Bemerkung. Wenn $\sum a_i$ konvergiert, dann muß $\sum |a_i|$ noch nicht konvergent sein. **4/1/18**
(Der Beweis hierzu erfolgt später.)

Satz 4.4 *Es seien* $\sum a_i$, $\sum b_i$ *konvergent und* $a, b \in \mathbb{R}$. **4/1/19**
Dann ist $\sum(a \cdot a_i + b \cdot b_i)$ *konvergent und* $\sum(a \cdot a_i + b \cdot b_i) = a \cdot \sum a_i + b \cdot \sum b_i$.

Beweis. Sei $S'_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$, $S''_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i$ und $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n}(a \cdot a_i + b \cdot b_i)$. **4/1/20**
Dann ist $S_n = a \cdot S'_n + b \cdot S''_n$. Aus den Eigenschaften für konvergente Folgen (Satz 3.10) erhält man sofort die Behauptung. ❑

Satz 4.5 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ *ist konvergent gdw für jedes* $k \geq 1$ *gilt:* $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$ *ist konvergent* **4/1/21**
$\Big($*und es ist* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i + \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i\Big)$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich sofort aus den Eigenschaften für konvergente Folgen. **4/1/22**
Man benutzt für $n \geq k$:

$$S_n = a_0 + \cdots + a_n = \underbrace{a_0 + \cdots + a_{k-1}}_{:=c} + \underbrace{a_k + \cdots + a_n}_{:=S'_n}.$$

Wir wissen schon, daß (S_n) konvergiert gdw (S'_n) konvergiert und daß $\lim S_n = c + \lim S'_n$.
Hieraus folgt die Behauptung. ❏

Bemerkung. Ein Anfangsstück einer Reihe ist also ohne Belang für das Konvergenz- **4/1/23**
verhalten der Reihe, wohl aber für den Wert der Reihe (falls Konvergenz vorliegt).

Definition. (*alternierende Reihe*) **4/1/24**
$\sum a_i$ heißt *alternierend*
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $a_i \neq 0$ und $a_i < 0$ gdw $a_{i+1} > 0$ für jedes i
(oder aber $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ für jedes i).

Beispiele. **4/1/25**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \mp \cdots.$$

Satz 4.6 (*Leibniz–Kriterium*) **4/1/26**
Ist $\sum a_i$ *alternierend und* $\lim a_i = 0$ *und* $(|a_i|)_{i=0,1,2,\ldots}$ *monoton fallend,*
dann ist $\sum a_i$ *konvergent.*

Beweis. Es sei o.B.d.A. $a_0 > 0$ (anderenfalls betrachten wir $a_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ und $a_1 > 0$). **4/1/27**
Weiterhin sei $|a_i| = \alpha_i$ (> 0). Dann ist $\lim \alpha_i = 0$ und $\sum a_i = \sum (-1)^i \cdot \alpha_i$.
Folglich gilt:

$$\begin{aligned} |S_{n+k} - S_n| &= \Big|(-1)^{n+1}\alpha_{n+1} + \cdots + (-1)^{n+k} \cdot \alpha_{n+k}\Big| \\ &= \Big|(-1)^{n+1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \cdots + (-1)^{k-1}\alpha_{n+k})\Big| \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\left|(-1)^{n+1}\right|}_{=1} \cdot |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} \pm \cdots + (-1)^{k-1}\alpha_{n+k}|$$

$$= |\underbrace{\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}} + \underbrace{\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}} \pm \cdots + (-1)^{k-1}\alpha_{n+k}| \ := \ (\star)$$

In Abhängigkeit von k ist die Anzahl der Summanden α_i in $(\star)$ gerade bzw. ungerade. Nach Voraussetzung ist die Folge (α_i) monoton fallend, also $\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} \geq 0, \ \ldots$. Ist k gerade, dann kann man die Summanden in $(\star)$ paarweise zusammenfassen, und es ist

$$(\star\star) := (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}) + \cdots + (\alpha_{n+k-1} - \alpha_{n+k}) \geq 0.$$

Ist k ungerade, dann bleibt bei der paarweisen Zusammenfassung α_{n+k} übrig, aber α_{n+k} ist offensichtlich nicht negativ. Folglich ist auch in diesem Fall $(\star\star) \geq 0$.
Andererseits ist

$$(\star\star) = \alpha_{n+1} - \underbrace{(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(\qquad)}_{\geq 0} \ \leq \ \alpha_{n+1}.$$

Insgesamt gilt also

$$0 \leq (\star\star) \leq \alpha_{n+1} \quad \text{und damit} \quad |S_{n+k} - S_n| = |(\star\star)| \leq \alpha_{n+1}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\alpha_n \to 0$ gibt es ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$:
$|S_{n+k} - S_n| \leq \alpha_{n+1} < \varepsilon$. $\implies$ $(S_n) = \sum a_i$ ist konvergent. ❏

Satz 4.7 *Sei* $\sum a_i$ *eine Reihe mit* $a_i \geq 0$ *für jedes* i. **4/1/28**
Dann gilt: $\sum a_i$ *ist konvergent gdw die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. Es sei $S_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$. Zum Beweis benutzen wir Satz 3.8 (monotone Folgen sind konvergent gdw sie beschränkt sind). **4/1/29**
$(\longrightarrow)$ $\sum a_i$ ist konvergent $\implies$ (S_n) konvergent $\implies$ (S_n) beschränkt.
$(\longleftarrow)$ Wegen $a_i \geq 0$ für jedes i, ist (S_n) monoton wachsend. Ist außerdem (S_n) beschränkt, so ist $(S_n) = \sum a_i$ konvergent. ❏

Beispiele.

1. (Anwendung des Leibniz-Kriteriums) **4/1/30/1**

Behauptung: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}}_{:= a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent.

Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend, $a_n \to 0$ und $|a_n| = \dfrac{1}{n+1}$ monoton fallend, folglich ist die betrachtete Reihe konvergent.

Sei $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{1}{n+1} \implies a_0 = 1 > a > 0$

(vgl. Beweis zu Satz 4.6; mit dem späteren Korollar zu Satz 7.11 läßt sich leicht zeigen, daß $a = \ln 2$).

2. (Die Glieder einer Reihe dürfen nicht beliebig „umsortiert“ werden.) **4/1/30/2**

Wir betrachten die Reihe aus Beispiel 1 und nehmen an, daß man die Glieder einer Reihe beliebig umsortieren darf, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots && \text{(umsortiert)} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \cdots}_{=0} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots && \text{(0 addiert)} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \cdots && \text{(umsortiert)} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \cdots \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \cdots = 0 \quad \lightning ! && \text{(umsortiert und addiert)}
\end{aligned}$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ ist nicht konvergent. (**Harmonische Reihe**) **4/1/30/3**

Diese Reihe dient gleichzeitig als Beispiel dafür, daß eine konvergente Reihe nicht absolut konvergent sein muß. (vgl. Beispiel 1.)

Es sei $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Wir betrachten jetzt die 2^n-te Partialsumme

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

und bilden

$$\begin{aligned}
S_{2^{n+1}} - S_{2^n} &= \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \\
&\qquad \text{(jeder dieser } 2^n \text{ Summanden ist größer oder gleich } \tfrac{1}{2^{n+1}}) \\
&\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{für beliebiges } n.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$S_{2^n} = S_{2^0} - S_{2^0} + S_{2^1} - S_{2^1} + \cdots + S_{2^{n-1}} - S_{2^{n-1}} + S_{2^n}$$

$$= \underbrace{S_{2^0}}_{=1} + \underbrace{S_{2^1} - S_{2^0}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{S_{2^2} - S_{2^1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{S_{2^n} - S_{2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$\geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Die Teilfolge (S_{2^i}) von (S_n) ist also unbeschränkt, und somit ist $(S_n) = \sum \frac{1}{n}$ nicht konvergent.

Da (S_n) monoton wächst, ist $\sum \frac{1}{n}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

4. Ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ alternierend und $a_i \to 0$ aber $(|a_i|)$ nicht monoton fallend, dann muß $\sum a_i$ nicht konvergent sein. **4/1/30/4**

Sei $a_i = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{falls } i \text{ ungerade und } i = 2n+1, \\ -\frac{1}{2^n}, & \text{falls } i \text{ gerade und } i = 2n. \end{cases}$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = -\frac{1}{2^0} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \mp \cdots$$

Wir betrachten $S_{2^{m+1}} = a_0 + \cdots + a_{2^{m+1}}$.

Summiert man in dieser endlichen Summe die a_i mit ungeradem Index i, so erhält man

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2} \quad \text{(vgl. Beispiel 3.)}$$

Die Summe der a_i mit geradem Indes ergibt

$$-\frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^{2^m}} = -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m}\right) =$$

$$-\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}\right) \geq -2 \quad \text{(vgl. geometrische Reihe)}$$

(denn für $i = 2^{m+1} = 2n$ ist $n = 2^m$, also $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2^m}}$).

Damit erhalten wir insgesamt

$$S_{2^{m+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 1 + \frac{m}{2}} - \left(\underbrace{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m}}_{\leq 2}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{m}{2} - 2 \geq \frac{m}{2} - 1 \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty.$$

Folglich ist (S_{2^n}) eine unbeschränkte Teilfolge von (S_n) und somit $\sum a_i$ nicht konvergent.

5. Beispiel dafür, wie der junge Leibniz 1672 in Paris – er sollte dort seine „Rechenkünste“ unter Beweis stellen – mit falschen Hilfsmitteln den richtigen Wert einer Reihe berechnet hat (vgl. Wußing, H. und Wolfgang Arnold. Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1975, S. 212). **4/1/30/5**

Gegeben ist die Reihe $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{1 + \cdots + n} + \cdots$.

Man berechne den Wert der Reihe.

Ansatz von Leibniz:

Sei $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ (harmonische Reihe; nicht konvergent!) und

$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$. Dann ist (nach Leibniz):

$$\begin{aligned}
B - 1 + \frac{1}{2}A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)}_{=\frac{1}{3}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right)}_{=\frac{1}{4}} + \cdots \\
&= B.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$B - 1 + \frac{1}{2}A = B \quad \text{und damit} \quad A = 2.$$

Erstaunlicherweise stimmt der Wert. Die Methoden sind aber fehlerhaft, da mit divergenten Reihen so umgegangen wurde, als wären sie konvergent.

Es soll jetzt noch eine exakte Lösung gegeben werden.

Es ist (nach Gauß 1777 – 1855)

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1 + \cdots + n} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right).
\end{aligned}$$

Es ist $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$; also

$$\begin{aligned}
S_n &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{0} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{0} - \cdots \underbrace{- \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{0} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 2.
\end{aligned}$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \cdots + i} = 2.$$

Definition. (*Minorante, Majorante*) **4/1/31**
Es seien $\sum a_i$, $\sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern.
$\sum a_i$ heißt *Minorante von* $\sum b_i$ und gleichzeitig heißt $\sum b_i$ *Majorante von* $\sum a_i$
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ $a_i \leq b_i$ für alle i.

Satz 4.8 (*Majorantenkriterium*) **4/1/32**
Es seien $\sum a_i$, $\sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

(1) *Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.*
(2) *Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.*

Beweis. (1). Nach Voraussetzung gilt $0 \leq a_i \leq b_i$ für alle i. Folglich ist **4/1/33**

$$0 \leq S_n = a_0 + \cdots + a_n \leq S'_n = b_0 + \cdots + b_n.$$

Da (S_n) monoton wächst, genügt zu zeigen, daß (S_n) beschränkt ist.
Nach Voraussetzung ist (S'_n) konvergent, also auch beschränkt. Folglich ist auch (S_n) beschränkt.

(2) Kontraposition von (1). ❑

Bemerkung. In Satz 4.8 genügt es vorauszusetzen, daß $0 \leq a_i \leq b_i$ für fast alle i gilt. **4/1/34**

Satz 4.9 (*Wurzelkriterium*) **4/1/35**
Es sei (a_i) eine beliebige Folge. Dann gilt:

(1) *Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$, dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.*
(2) *Ist $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$ für alle i, dann ist $\sum a_i$ divergent.*

Beweis. (1). Es sei $0 < q < 1$ und $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q \implies |a_i| \leq q^i$. **4/1/36**
$\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ ist eine konvergente Majorante von $\sum |a_i|$ (geometrische Reihe). Folglich ist $\sum |a_i|$ (nach dem Majorantenkriterium) konvergent, und damit ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2). Sei $\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1$. Dann ist $|a_i| \geq 1$ und daher (a_i) keine Nullfolge. Folglich ist $\sum a_i$ divergent. ❑

Bemerkung. Für die Anwendung des Wurzelkriteriums genügt es, daß $\sqrt[i]{|a_i|} \le q < 1$ **4/1/37**
für fast alle i. (Offenbar folgt aus $\sqrt[i]{|a_i|} \le q < 1$ sofort $\overline{\lim}\sqrt[i]{|a_i|} < 1$.)
Ist andererseits (a_i) beschränkt und $\overline{\lim}\sqrt[i]{|a_i|} := c < 1$, so ist $\sqrt[i]{|a_i|} \le \underbrace{c + \frac{1-c}{2}}_{:= q < 1}$ für fast alle i; folglich ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

Ist also $\overline{\lim}\sqrt[i]{|a_i|} < 1$, so ist $\sum a_i$ absolut konvergent.
Analog erhält man: Wenn $\sqrt[i]{|a_i|} > 1$ für fast alle i, so ist $\sum a_i$ divergent.

Achtung: Für die Konvergenz von $\sum a_i$ reicht es noch nicht, daß stets $\sqrt[i]{|a_i|} < 1$ (bzw. $\overline{\lim}\sqrt[i]{|a_i|} = 1$) ist;
z.B. für $a_i = \frac{1}{i}$ ist $\sqrt[i]{\frac{1}{i}} < 1$, denn $\frac{1}{i} < 1$ (bzw. $\overline{\lim}\,\frac{1}{i} = 1$). Aber $\sum \frac{1}{i}$ ist nicht konvergent.
Wenn $\lim \sqrt[i]{|a_i|}$ existiert, dann ist offenbar $\overline{\lim}\sqrt[i]{|a_i|} = \lim \sqrt[i]{|a_i|}$, und man rechnet nur mit dem Limes.

Satz 4.10 (*Quotientenkriterium*) **4/1/38**
Es sei $a_i \ne 0$ für jedes i. Dann gilt:

(1) *Existiert ein q mit $0 < q < 1$, so daß für jedes i gilt: $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \le q$, dann ist $\sum a_i$ absolut konvergent.*

(2) *Ist $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \ge 1$ für jedes i, dann ist $\sum a_i$ divergent.*

Beweis. (1). Sei $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \le q$. Dann ist $|a_{i+1}| \le q \cdot |a_i|$ für alle i, folglich gilt **4/1/39**

$$|a_i| \le q \cdot |a_{i-1}| \le q^2 \cdot |a_{i-2}| \le \cdots \le q^i \cdot |a_0|.$$

Damit ist $\sum |a_0| \cdot q^i = |a_0| \cdot \sum q^i$ eine konvergente Majorante von $\sum |a_i|$, folglich ist $\sum a_i$ absolut konvergent.

(2). Sei jetzt $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \ge 1$ für alle i. Dann ist $|a_{i+1}| \ge |a_i| \ge \cdots \ge |a_0|$ und $|a_0| > 0$ (nach Voraussetzung). Folglich ist (a_i) keine Nullfolge und damit $\sum a_i$ divergent. ❑

Bemerkung. Für die Anwendung des Quotientenkriteriums genügt es, daß **4/1/40**
$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \le q < 1$ für fast alle i.
Ähnlich wie beim Wurzelkriterium folgt aus $\overline{\lim}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < 1$ die absolute Konvergenz

von $\sum a_i$.
Ist andererseits $\underline{\lim}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| > 1$, dann ist $\sum a_i$ divergent.

Beispiele. **4/1/41**

1. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$, $a \neq 0$, also $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$.
Hier bietet sich das Wurzelkriterium an. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|^n} = \sqrt[n]{\left|\frac{a}{n}\right|^n} = \left|\frac{a}{n}\right| \leq q < 1$$

für fast alle n; z.B. $q = \frac{1}{2}$ leistet das Verlangte.

Benutzt man für dasselbe Beispiel das Quotientenkriterium, dann wird die Berechnung komplizierter. Es ist (vgl. auch Beispiel 3/1/35)

$$\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n}{n^n}}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{a^n}\right| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = |a| \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} := (\star).$$

Wir wissen schon, daß $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, also $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}$, folglich ist

$(\star) \leq |a| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \leq q < 1$ für fast alle n (z.B. für $q = \frac{1}{2}$).

2. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \neq 0$. **4/1/42**
Hier bietet sich das Quotientenkriterium an, denn

$$\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{a^n}\right| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = |a| \cdot \frac{1}{n+1} \leq q < 1$$

für fast alle n und z.B. $q = \frac{1}{2}$.

Dasselbe Beispiel wird mit dem Wurzelkriterium komplizierter.

Die Beispiele 1 und 2 zeigen, daß die untersuchten Reihen für alle fixierten Elemente $a \in \mathbb{R}$ konvergieren.

3. Wir betrachten jetzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ und zeigen, daß diese Reihe für gewisse Werte **4/1/43**
$a \in \mathbb{R}$ konvergiert und für andere Werte divergiert.
Es sei zunächst $|a| < 1$, $a \neq 0$. Wir benutzen das Quotientenkriterium. Für $q = |a|$ und für fast alle n gilt

$$\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}}\right| = |a| \cdot \frac{n}{n+1} \leq q < 1.$$

Ist $|a| = 1$, so erhält man für $a = 1$ die harmonische Reihe (diese ist divergent) und für $a = -1$ eine konvergente alternierende Reihe.
Es sei nun $|a| > 1$. Dann ist $\left(\frac{a^n}{n}\right)$ keine Nullfolge, und somit $\sum \frac{a^n}{n}$ nicht konvergent.

4. Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. **4/1/44**

Die Konvergenz dieser Reihe kann man weder mit dem Wurzel- noch mit dem Quotientenkriterium nachweisen (bitte ausprobieren!). Für eine geeignete konvergente Majorante könnte man das Majorantenkriterium heranziehen.

Es ist $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent. Denn

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \Longrightarrow$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist $S_k \to 1$, und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ eine konvergente Majorante von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$ erhält man die Behauptung.

5. Wir betrachten jetzt ein Beispiel für eine Reihe, bei der das Quotientenkriterium versagt (das Wurzelkriterium ließe sich anwenden). **4/1/45**

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \cdots =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots .$$

Folglich ist $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt für alle geraden n : $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und folglich $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2.$

Die Reihe ist aber konvergent, denn es ist $S_k = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k$ für gerade k und damit $S_k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2.$

Für beliebige k ist (S_k) monoton wachsend und beschränkt, also auch konvergent.

4.2 Assoziativität und Kommutativität bei Reihen

Definition. Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. **4/2/1**

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ entsteht aus $\sum a_n$ durch das *Setzen von Klammern*

$\underset{\text{Df}}{=}$ Es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(n_i)_{i=0,1,2,\ldots}$ von natürlichen Zahlen, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 + \cdots + a_{n_0},\\
b_1 &= a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1},\\
&\vdots\\
b_{i+1} &= a_{n_i+1} + \cdots + a_{n_{i+1}},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bemerkung. In der Ausgangsreihe werden gewisse aufeinanderfolgende Glieder durch Klammern zusammengefaßt. **4/2/2**

Satz 4.11 *In einer konvergenten Reihe können Klammern beliebig gesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern.* **4/2/3**
(D.h., für konvergente Reihen gilt das allgemeinste Assoziativgesetz.)

Beweis. Sei $\sum a_n$ konvergent, $\sum a_n = a$, und sei $\sum b_i$ durch das Setzen von Klammern aus $\sum a_n$ entstanden. Weiterhin sei $S_m = \sum\limits_{n=0}^{m} a_n$ und **4/2/4**

$$S'_m = \sum_{i=0}^{m} b_i = \underbrace{a_0 + \cdots + a_{n_0}}_{:= b_0} + \;\cdots\; + \underbrace{a_{n_{m-1}+1} + \cdots + a_{n_m}}_{b_m} = S_{n_m}.$$

Offenbar ist $(S'_m) = (S_{n_m})$ eine Teilfolge von (S_m). Wegen $S_m \to a$ konvergiert auch (S'_m) als Teilfolge von (S_m) gegen a; also $S'_m \to a \implies \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i = a.$ ❏

Bemerkung. In einer beliebigen Reihe dürfen Klammern nicht immer gesetzt oder weggelassen werden, ohne das Konvergenzverhalten zu verändern. **4/2/5**

Beispiel. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \cdots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$ ist konvergent. **4/2/6**

Weglassen der Klammern in der letzten Reihe liefert $1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots$, also eine divergente Reihe.

Geht man von der divergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots$ aus, dann dürfen hier nicht beliebig Klammern gesetzt werden, denn z.B. $(1-1)+(1-1)+\cdots$ macht aus der ursprünglich divergenten Reihe eine konvergente.

Wir haben schon gezeigt, daß konvergente Reihen nicht beliebig umgeordnet werden dürfen (vgl. Beispiel 2 := 4/1/30/2). Mit Hilfe einer Definition sollen die Reihen hervorgehoben werden, bei denen dies erlaubt ist. **4/2/7**

Definition. (*unbedingte Konvergenz*) **4/2/8**

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion (oder auch *Permutation* von $\mathbb{N}$).

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ durch *Umordnung* aus $\sum a_n$ entstanden.

$\sum a_n$ heißt *unbedingt konvergent*

$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Jede durch Umordnung aus $\sum a_n$ entstandene Reihe ist konvergent.

Satz 4.12 *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert unbedingt und zwar immer gegen denselben Wert.* **4/2/9**

(D.h., für absolut konvergente Reihen gilt das allgemeinste Kommutativgesetz.)

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, $\sum a_n = a$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation von $\mathbb{N}$. **4/2/10**

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ konvergiert gegen a.

z.z.: Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein n^*, so daß für jedes $n \geq n^*$ gilt: $|a_{f(0)} + \cdots + a_{f(n)} - a| < \varepsilon$.

Es sei

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n, \quad S'_m = \sum_{n=0}^{m} a_{f(n)} \quad \text{und} \quad S''_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n|.$$

Nach Voraussetzung ist (S''_m) konvergent. Folglich gilt nach dem Cauchy–Kriterium: Es existiert ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ und jedes $k \geq 1$:

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da k beliebig ist, erhält man daraus für je endlich viele $n_1, \ldots, n_l$, die sämtlich größer als n_0 sind:

$$|a_{n_1}| + \cdots + |a_{n_l}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Voraussetzung gilt weiterhin: Es existiert ein m_0, so daß für jedes $n \geq m_0$:

$$|S_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $k_0 = \{n_0, m_0\}$. Da f eine Permutation von $\mathbb{N}$ ist, kommen $0, 1, \ldots, k_0$ unter den Elementen $f(0), f(1), f(2), \ldots$ vor. Sei nun n^* so groß gewählt, daß $0, 1, \ldots, k_0$ schon unter den Elementen $f(0), \ldots, f(n^*)$ vorkommen.
g.z.z.: für $m \geq n^*$ gilt: $|S'_m - a| < \varepsilon$.

$$S'_m = a_{f(0)} + \cdots + a_{f(m)} = a_0 + \cdots + a_{k_0} + \ a_{f(i_1)} + \cdots + a_{f(i_l)};$$

wobei $\{f(i_1), \cdots, f(i_l)\} = \{f(0), \ldots, f(m)\} \setminus \{0, \ldots, k_0\}$; insbesondere ist $f(i_j) > k_0$ für $j = 1, \ldots, l$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
|S'_m - a| &= |a_0 + \cdots + a_{k_0} + a_{f(i_1)} + \cdots + a_{f(i_l)} - a| \\
&\leq |a_0 + \cdots + a_{k_0} - a| + |a_{f(i_1)} + \cdots + a_{f(i_l)}| \\
&\leq \underbrace{|S_{k_0} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{f(i_1)}| + \cdots + |a_{f(i_l)}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Satz 4.13 (*Umordnungssatz von Riemann*) **4/2/11**
Ist $\sum a_n$ *konvergent und nicht absolut konvergent, dann existiert für jedes* $c \in \mathbb{R}$ *bzw. für* $c = \pm\infty$ *eine Umordnung* $\sum b_i$ *von* $\sum a_n$, *so daß* $\sum b_i = c$.

Beweis. Die Konvergenz von $\sum a_n$ bewirkt, daß $a_n \to 0$. **4/2/12**
Setzt man

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & \text{für } a_n \geq 0, \\ 0 & \text{für } a_n < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad a_n^- := \begin{cases} -a_n & \text{für } a_n \leq 0, \\ 0 & \text{für } a_n > 0, \end{cases}$$

dann ist offenbar

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{und} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-.$$

Da $\sum a_n$ nicht absolut konvergiert, sind die beiden Reihen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$ divergent. Wären beide Reihen konvergent, so ist wegen $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ nach Satz 4.4 auch $\sum |a_n|$ konvergent. ↯!
Wäre eine der beiden Reihen konvergent, etwa $\sum a_n^+$ und die andere divergent, so erhält man wiederum nach Satz 4.4 aus $a_n^- = a_n^+ - a_n$ die Konvergenz von $\sum a_n^-$; hieraus ergibt sich erneut ein Widerspruch.

Da a_n^+ und a_n^- stets nicht negativ sind, divergieren beide Reihen bestimmt gegen $+\infty$. Dies nutzen wir aus, um die Behauptung des Umordnungssatzes zu beweisen.

Es sei zunächst $c \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$ (den Fall $c < 0$ behandelt man analog). Induktiv definiert man Folgen $\left(S_{n_\nu}\right)$, $\left(S'_{m_\nu}\right)$, deren Glieder aus je endlich vielen ausgewählten Summanden von $\sum a_n^+$ bzw. $\sum a_n^-$ bestehen. Wir geben hier nur an, wie man vom nullten zum ersten Folgenglied kommt, der eigentliche Induktionsschritt ist daraus klar ersichtlich.

1. Es seien $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$, so daß
$$\sum_{i=0}^{n_0-1} a_i^+ \leq c < \sum_{i=0}^{n_0} a_i^+ := S_{n_0} \quad \text{und}$$
$$S_{n_0} - \sum_{i=0}^{m_0-1} a_i^- \geq c > S_{n_0} - \sum_{i=0}^{m_0} a_i^- := S'_{m_0}.$$
2. Für den nächsten Schritt seien $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, so daß
$$S'_{m_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n_1-1} a_i^+ \leq c < S'_{m_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i^+ := S_{n_1} \quad \text{und}$$
$$S_{n_1} - \sum_{i=m_0+1}^{m_1-1} a_i^- \geq c > S_{n_1} - \sum_{i=m_0+1}^{m_1} a_i^- := S'_{m_1}.$$

Bei jedem Schritt wird wenigstens ein Glied aus jeder der beiden Reihen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$ verbraucht.

Wir betrachten jetzt die folgende Umordnung der Ausgangsreihe $\sum a_n$ (wobei die aufgrund der Definition von a_i^+ und a_i^- „künstlich“ eingeführten Nullen ersatzlos gestrichen werden können, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern):
$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i = a_0^+ + \cdots + a_{n_0}^+ - a_0^- - \cdots - a_{m_0}^- +$$
$$a_{n_0}^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_{m_0}^- - \cdots - a_{m_1}^- \pm \cdots$$
und beweisen, daß $\sum\limits_{i=0}^{\infty} = c$.

Aus der Definition von $\left(S_{n_\nu}\right)$, $\left(S'_{m_\nu}\right)$ folgt unmittelbar, daß stets
$$0 < S_{n_\nu} - c < a_{n_\nu}^+ \quad \text{und} \quad 0 < c - S'_{m_\nu} < a_{m_\nu}^-.$$
Wegen $a_n \to 0$ ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{n_\nu} = c = \lim\limits_{\nu\to\infty} S'_{m_\nu}$.

Ist $S_n^\star := \sum\limits_{i=0}^{n} b_i$ eine beliebige Partialsumme von $\sum b_i$, dann gibt es offenbar ein $k \in \mathbb{N}$, so daß
$$S'_{m_k} \leq S_n^\star \leq S_{n_k} \quad \text{oder} \quad S'_{m_k} \leq S_n^\star \leq S_{n_{k+1}}.$$
Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^\star = c = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$.

Es sei jetzt $c = \infty$ (für $c = -\infty$ verläuft der Beweis analog).
Wegen $a_n \to 0$ ist $|a_n| \le \frac{1}{2}$ für fast alle n. Es genügt eine Umordnung $\sum b_i$ von $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ anzugeben, die bestimmt gegen ∞ divergiert; die fehlenden Summanden $a_0, \dots, a_k$ können an den Anfang der Reihe gesetzt werden, ohne das Divergenzverhalten der Reihe zu beeinflussen. (Aus technischen Gründen werden auch hier wieder, wie im vorhergehenden Fall, Nullen eingefügt, die man ersatzlos streichen kann.)

Es ist $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{n+k}}_{:=d_n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$.

Sei n_0 die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$U_0 := \sum_{i=0}^{n_0} d_i^+ \ge \frac{3}{2}$$

und n_1 die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$U_1 := \sum_{i=n_0+1}^{n_1} d_i^+ \ge \frac{3}{2} \quad \text{usw.}$$

Solche Zahlen gibt es, da $\sum d_i^+$ bestimmt gegen ∞ divergiert.
Wegen $|d_i| \le \frac{1}{2}$ für alle i ist stets $U_i - d_i^- \ge 1$.
Die Umordnung

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} b_i &:= d_o^+ + \dots + d_{n_0}^+ - d_0^- + d_{n_0+1}^+ \dots + d_{n_1}^+ - d_1^- \pm \cdots \\ &= U_0 - d_0^- + U_1 - d_1^- \pm \cdots\end{aligned}$$

leistet das Verlangte. Denn ist $S_m = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ eine beliebige Partialsumme von $\sum b_i$, dann gibt es offenbar ein maximales $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$S_m = U_0 - d_0^- + \dots + U_k - d_k^- \quad \text{oder}$$

$$S_m = U_0 - d_0^- + \dots + U_k - d_k^- + d_{k+1}^+ + \dots + d_m^+.$$

Wegen $d_i^+ \ge 0$ ist $S_m \ge k + 1$. Hieraus folgt schließlich $S_m \to \infty$. ❑

Satz 4.14 (*Multiplikation unendlicher Reihen*) **4/2/13**

Voraussetzungen:

(1) *Es seien* $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent und* $\sum a_m = a$, $\sum b_n = b$.

(2) f *sei eine Bijektion zwischen* $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(Die Existenz einer solchen Bijektion weist man mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren nach).

(3) *Für jedes* $i \in \mathbb{N}$ *sei* $f(i) = (m_i, n_i)$ *und* $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Behauptung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \quad \textit{ist absolut konvergent, und es ist} \quad \sum_{i=0}^{\infty} c_i = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = a \cdot b.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\sum c_i$ absolut konvergiert. **4/2/14**

g.z.z.: Die Folge der Partialsummen von $\sum |c_i|$ ist nach oben beschränkt.

Nach Voraussetzung existiert für jedes $i \in \mathbb{N}$ genau ein Paar $(m_i, n_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so daß $f(i) = (m_i, n_i)$, also $c_i = a_{m_i} b_{n_i}$.

Wir bilden

$$S_k := \sum_{i=0}^{k} |c_i| = \sum_{i=0}^{k} |a_{m_i} b_{n_i}| := (\star).$$

Sei $l = \max\{m_0, \ldots, m_k, n_0, \ldots, n_k\}$. Die Summanden aus $(\star)$ kommen unter den Summanden aus $|a_0 b_0| + \cdots + |a_i b_j| + \cdots + |a_l b_l|$ vor, wobei $i, j \leq l$.

Dann ist

$$\begin{aligned} S_k = (\star) &\leq |a_0 b_0| + \cdots + |a_i b_j| + \cdots + |a_l b_l| \\ &= \Big(\underbrace{|a_0| + \cdots + |a_l|}_{:= S'_l}\Big) \cdot \Big(\underbrace{|b_0| + \cdots + |b_l|}_{:= S''_l}\Big) = S'_l \cdot S''_l. \end{aligned}$$

Da $\sum |a_i|$, $\sum |b_i|$ nach Voraussetzung konvergieren, sind (S'_n), (S''_n) beschränkt. Folglich ist $(S'_n \cdot S''_n)$ beschränkt und somit ist auch (S_k) beschränkt. Hieraus ergibt sich die Konvergenz von $\sum |c_i|$ und damit die absolute Konvergenz von $\sum c_i$.

Behauptung: $\sum c_i = a \cdot b$.

Da $\sum c_i$ absolut konvergiert, ist jede Umordnung von $\sum c_i$ ebenfalls konvergent und zwar gegen den gleichen Wert.

Wir betrachten eine spezielle Umordnung und Zusammenfassung bestimmter Summanden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} c_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{m_i} b_{n_i} &= \underbrace{a_0 b_0}_{:= c'_0} + (\underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0}_{:= c'_1}) + \cdots + \\ &\qquad (\underbrace{a_0 b_i + a_1 b_i + \cdots + a_i b_i + a_i b_{i-1} + \cdots + a_i b_0}_{:= c'_i}) + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c'_i. \end{aligned}$$

Es seien

$$S^*_n = \sum_{i=0}^{n} c'_i, \quad S^{**}_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{und} \quad S^{***}_n = \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Dann gilt für die oben angegebene Umordnung: $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***}$.
Wegen $S_n^{**} \to a$, $S_n^{***} \to b$ gilt $S_n^* = S_n^{**} \cdot S_n^{***} \to a \cdot b$, also

$$\sum c_i = a \cdot b = \Big(\sum a_m\Big) \cdot \Big(\sum b_n\Big). \qquad ❏$$

Bemerkung. Da bei absolut konvergenten Reihen die Reihenfolge der Glieder keine Rolle spielt, kann in der Produktreihe $\sum c_n = \Big(\sum a_i\Big) \cdot \Big(\sum b_j\Big)$ eine geeignete Reihenfolge ausgezeichnet werden. Dies führt zum sog. Cauchyprodukt. **4/2/15**

Definition. (*Cauchyprodukt*) **4/2/16**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ ist das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$

$\underset{\text{Df}}{=}$ $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Es gilt also: **4/2/17**

$$\begin{aligned}\sum c_n &= \Big(\sum a_i\Big) \cdot \Big(\sum b_j\Big)\\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) +\\ &\quad (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0) + \cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-1}\Big) \quad (\text{für } j = n - i).\end{aligned}$$

Beispiel. **4/2/18**

Das Cauchyprodukt von absolut konvergenten Reihen ist wieder absolut konvergent.

Es sei $|a| < 1$. Dann ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a^i$ absolut konvergent und $\sum a^i = \dfrac{1}{1-a}$.

Folglich ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \underbrace{\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a^i\Big)}_{=\frac{1}{1-a}} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a^j\Big)}_{=\frac{1}{1-a}} = \frac{1}{(1-a)^2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} \underbrace{a^i a^j}_{a^n}\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \underbrace{\Big(\sum_{i+j=n} 1 \Big)}_{= n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n.$$

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Offenbar ist $|n \cdot a^n| \leq |(n+1) \cdot a^n|$. Folglich ist $\sum (n+1)|a|^n$ eine konvergente Majorante von $\sum n|a^n|$. Dann ist $\sum n \cdot a^n$ absolut konvergent, und damit gilt

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a^n}_{= \frac{1}{(1-a)^2}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a^n}_{= \frac{1}{1-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n.$$

Folglich ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{1-(1-a)}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Auf diese Weise erhält man neue Beispiele für absolut konvergente Reihen.

Wir befassen uns jetzt noch kurz mit sogenannten *Doppelreihen*. Dazu sei **4/2/19**

$$(a_{mn}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

eine „unendliche Matrix“. Eine Matrix dieser Art nennen wir auch *Doppelfolge*. Die *Doppelfolge* (a_{mn}) *konvergiert* gegen a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_{mn} - a| < \varepsilon$. **Bez.:** $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn} = a$

Es sei jetzt

$$S_{mn} := \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} = (a_{00} + \cdots + a_{0n}) + (a_{10} + \cdots + a_{1n}) + \cdots + (a_{m0} + \cdots + a_{mn}).$$

Dann heißt (analog wie bei der Definition von Reihen) die Doppelfolge (S_{mn}) auch *Doppelreihe*.

Bez.: $(S_{mn}) := \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$

Die *Doppelreihe konvergiert* gegen a, wenn (S_{mn}) gegen a konvergiert.

Bez.: $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = a$

Es erhebt sich nun die Frage, ob man den Limes $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn}$ (falls er existiert) auch so berechnen kann, indem man zunächst die Zeilensummen $b_i := \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ bildet und anschließend die unendliche Summe der b_i betrachtet (falls diese Reihen konvergieren; eine entsprechende Frage könnte auch für die Spaltensummen gestellt werden). Unter gewissen Voraussetzungen kann der Limes tatsächlich so bestimmt werden. Aufschluß darüber gibt der folgende Satz.

Satz 4.15 (*Großer Umordnungssatz*) **4/2/20**

Es sei $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ *eine Doppelreihe,* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *eine Bijektion, und für* $\varphi(\nu) = (i,j)$ *sei* $b_\nu := a_{ij}$*. Weiterhin sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *absolut konvergent und* $\sum b_\nu = b$*. Dann gilt:*

(1) *Jede Zeilenreihe* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij} := Z_i$ *konvergiert absolut.*

(2) *Jede Spaltenreihe* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij} := S_j$ *konvergiert absolut.*

(3) *Die Reihen* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} Z_i$ *und* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} S_j$ *konvergieren absolut, und es ist*

$$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b.$$

Beweis. Sei $|b_\nu| = \beta_\nu$. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum \beta_\nu$; es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu = \beta$. **4/2/21**
Wegen $\beta_\nu \geq 0$ ist die Summe je endlich vieler $\beta_{\nu_1}, \ldots, \beta_{\nu_k}$ stets $\leq \beta$. Damit erhält man

(1). $\sum\limits_{j=0}^{n} \underbrace{|a_{ij}|}_{=\beta_\nu} \leq \beta$ für alle n. Folglich ist $Z_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.

(2). Weiterhin ist $\sum\limits_{i=0}^{m} |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m. Damit ist auch $S_j = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent.

(3). Es ist auch $\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n} |a_{ij}| \leq \beta$ für alle m, n.

Nach Behauptung (1) existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} |a_{ij}| := \alpha_i$. Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|}_{\leq\beta} = \sum_{i=0}^{m} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=0}^{m} \leq \beta.$$

Weiterhin ist

$$|Z_i| = \Big|\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\Big| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}|a_{ij}| = \alpha_i.$$

Also gilt stets

$$\sum_{i=0}^{m}|Z_i| \le \sum_{i=0}^{m}\alpha_i \le \beta.$$

Folglich ist $\sum Z_i$ absolut konvergent.

Analog zeigt man die absolute Konvergenz von $\sum S_j$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Voraussetzung bzw. nach den obigen Ausführungen natürliche Zahlen n_1, n_2, so daß für alle $n \ge n_1$ und alle $k \ge 0$ gilt:

$$|b_1 + \dots + b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und}$$

$$\beta_{n_2+1} + \dots + \beta_{n_2+k} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (\star)$$

Sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. In der Aufzählung $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n_0)$ kommen nur endlich viele Paare $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vor. Folglich existiert ein m_0, so daß $\varphi(0), \dots, \varphi(n_0)$ schon in der Menge $\{(i,j) : i \le m_0,\ j \le m_0\}$ auftreten.

Wählt man $m, n \ge m_0$, dann ist

$$\Big|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} - b\Big| = |b_1 + \dots + b_{n_0} - b + r|,$$

wobei r eine endliche Summe ist, die aus gewissen Gliedern $a_{ij} := b_\nu$ besteht, deren Indizes ν größer als n_0 sind.

Wegen $(\star)$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also erhält man für alle $m, n \ge n_0$:

$$\Big|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} - b\Big| \le |b_1 + \dots + b_{n_0} - b| + |r| < \varepsilon. \qquad (\star\star)$$

Für $n \to \infty$ in $(\star\star)$ erhält man

$$\Big|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - b\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{m} Z_i - b\Big| \le \varepsilon.$$

(Die Konvergenz der inneren Reihe ist schon nachgewiesen.)

Für $m \to \infty$ entsteht

$$\Big|\sum_{i=0}^{\infty} Z_i - b\Big| \le \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = b.$$

Wegen $\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}$ erhält man aus $(\star\star)$ analog

$$\Big|\sum_{j=0}^{\infty} S_j - b\Big| \le \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} S_j = b. \qquad ❏$$

Korollar. *Es sei* $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ *eine Doppelreihe,* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *eine Bijektion, und für* **4/2/22**

$\varphi(\nu) = (i,j)$ sei $b_\nu := a_{ij}$. Weiterhin sei jede Zeilenreihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| := \alpha_i$, und die Reihe $\sum \alpha_i$ sei ebenfalls konvergent. Dann gilt:

(1) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *ist absolut konvergent.*

(2) *Mit* $b := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *gelten auch die Behauptungen* (2)−(4) *aus dem vorhergehenden Satz* 4.15.

Beweis. Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{n} |b_\nu|$ eine Partialsumme von $\sum b_\nu$. Dann gibt es eine Zahl k, **4/2/23**
so daß alle Paare $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ in der Menge $\{(i,j) : i \leq k,\ j \leq k\}$ vorkommen. Folglich ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} |b_\nu| \leq \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} |a_{ij}| \leq \sum_{i=0}^{k}\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|}_{=\alpha_i} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i .$$

Dann ist die (monoton wachsende) Folge der Partialsummen von $\sum |b_\nu|$ nach oben beschränkt und folglich absolut konvergent. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.15 erfüllt und das Korollar bewiesen. ❏

4.3 Komplexe Zahlen

Wir führen jetzt die *komplexen Zahlen* ein, um sie für die Behandlung von sog. Potenz- **4/3/0**
reihen zur Verfügung zu haben.

Wir setzen als bekannt voraus, daß $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2$ einen zweidimensionalen Vektorraum mit den folgenden Operationen bildet:

$$(a,b)+(c,d) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (a+c, b+d) \quad \text{(Addition von Elementen aus } \mathbb{R}^2\text{)},$$ **4/3/1**

$$c \cdot (a,b) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (ca, cb) \quad \text{(Multiplikation mit reellen Zahlen)}.$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahlen betrachten wir in $\mathbb{R}^2$ die kanonische Basis $\{(1,0),(0,1)\}$ und erhalten so ein rechtwinkliges Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$, mit dessen Hilfe sich die Elemente aus $\mathbb{R}^2$ als Punkte in der Ebene darstellen lassen (*Gaußsche Zahlenebene*).

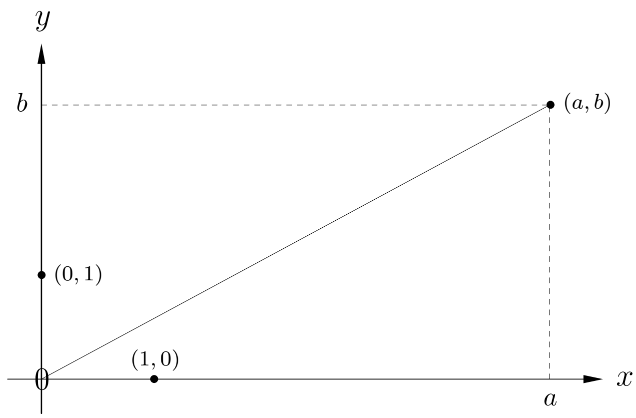

Abb. 4.1 Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung der komplexen Zahlen

Jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich eindeutig als Linearkombination der Basis darstellen.
Die folgenden Teilmengen $\{(x,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(0,y) \,:\, y \in \mathbb{R}\}$ bilden wichtige eindimensionale Teilräume, die mit den entsprechenden Koordinatenachsen identifiziert werden können.

Wir führen jetzt eine Multiplikation von Paaren in $\mathbb{R}^2$ ein. **4/3/2**
Es sei $(a,b)\cdot(c,d) \underset{\text{Df}}{=} (ac - bd, ad + bc)$.

Damit erhält man das folgende Resultat.

Satz 4.16 *Mit den definierten Operationen* (*Addition und Multiplikation von Paaren*) *bildet* $\mathbb{R}^2$ *einen Körper* $\mathbb{C}$ (den Körper der komplexen Zahlen). **4/3/3**

Beweis. Die Körperaxiome (1) – (4) (vgl. Eigenschaften reeller Zahlen) gelten schon, da $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum insbesondere eine additive abelsche Gruppe bildet mit $\mathbf{0} = (0,0)$ als neutralem Element bez. $+$ und $(-a,-b)$ als inversem Element von (a,b). **4/3/4**
Es bleiben noch (5) – (10) zu beweisen, d.h., für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ gilt:
(5) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$,
(6) $z_1z_2 = z_2z_1$.
(7) Es existiert ein Element $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^2$, so daß $z \cdot \mathbf{1} = z$ für jedes $z \in \mathbb{R}^2$.
(8) Für jedes $z \in \mathbb{R}^2$ mit $z \neq 0$, existiert ein $u \in \mathbb{R}^2$, so daß $z \cdot u = \mathbf{1}$.
(9) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$,
(10) $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.
Wir werden nicht alle diese Eigenschaften nachweisen.
Zu (6). Es sei $z_1 = (a_1, b_1)$ und $z_2 = (a_2, b_2)$ $\Longrightarrow$

$$z_1z_2 = (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2) \text{ und}$$

$$z_2z_1 = (a_2,b_2)\cdot(a_1,b_1) = (a_2a_1 - b_2b_1,\ a_2b_1 + b_2a_1)$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + b_1 a_2) \implies$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

(5) und (9) analog!

(7). $\mathbf{1} = (1,0)$ leistet das Verlangte.

$$(a,b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0,\ a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b).$$

(8). Es sei $z = (a,b) \neq (0,0) \implies a \neq 0$ oder $b \neq 0$, und dies gilt gdw $a^2 + b^2 \neq 0$.

Behauptung: $u = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ leistet das Verlangte.

Für $c := a^2 + b^2$ gilt:

$$z \cdot u = (a,b) \cdot \left(\frac{a}{c}, -\frac{b}{c} \right) = \left(\frac{a^2}{c} - \left(-\frac{b^2}{c} \right), -\frac{ab}{c} + \frac{ba}{c} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{c},\ 0 \right) = (1,0) = \mathbf{1}.$$

(10). $(1,0) \neq (0,0)$ trivial! ❑

Bemerkung. Man kann mit komplexen Zahlen im Prinzip rechnen wie mit reellen Zahlen, allerdings ist in $\mathbb{C}$ keine Ordnung definiert. **4/3/5**

Wir haben uns schon überlegt, daß $\{(1,0),(0,1)\}$ eine Basis für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bildet. Der Teilraum $\{x \cdot (1,0) : x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist offenbar isomorph mit $\mathbb{R}$ (als 1-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$). Daher identifizieren wir in Zukunft $(1,0)$ mit 1. Für $(0,1)$ schreibt man auch i (nicht zu verwechseln mit natürlichen Zahlen i), so daß durch $\{1,\ i\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

Mit dieser Vereinbarung gilt

$$(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

Für $a \cdot 1$ bzw. für $b \cdot i$ schreiben wir kurz a bzw. ib. Damit erhält man eine geeignete Darstellung für komplexe Zahlen:

$$(a,b) = a + ib, \quad (0,0) = 0 + i0 := 0.$$

Bez.: In $z = x + iy$ heißt x *Realteil* $(:= \mathrm{Re}(z))$ und y *Imaginärteil* $(:= \mathrm{Im}(z))$ von z.

Bemerkung. Aus der Definition der Multiplikation für komplexe Zahlen ergibt sich **4/3/6**

$$i \cdot i = i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = (-1) \cdot (1,0) = -1.$$

und weiterhin

$$(a+ib)\cdot(c+id) = (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc) = ac-bd+i(ad+bc).$$

Berechnet man das Produkt (formal) wie in einem Körper, so entsteht dasselbe Ergebnis:

$$(a+ib)\cdot(c+id) = a\cdot c + a\cdot id + ib\cdot c + \underbrace{ib\cdot id}_{i^2\cdot db} = ac-bd+i\cdot(ad+bc).$$

Definition. (*Betrag für komplexe Zahlen*) **4/3/7**

Es sei $z = x+iy$.

$|z| \underset{\text{Df}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$.

Bez.: $|z|$ heißt *Betrag* von z und
$|z_1 - z_2|$ heißt *Abstand* zwischen z_1 und z_2.

Satz 4.17 *Für komplexe Zahlen* z, z_1, z_2 *gilt*: **4/3/8**

(1) $|z| \geq 0$, *und* $|z| = 0 \iff z = 0$,

(2) $|-z| = |z|$, $(\Longrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|)$

(3) $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$, $(\Longrightarrow |z^n| = |z|^n)$

(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *falls* $z_2 \neq 0$,

(5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z|_2$,

(6) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

Beweis. (1). Sei $z = a+ib$. Dann gilt **4/3/9**

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0; \quad \sqrt{a^2+b^2} = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$$

(2). Trivial!

(3). Sei $z_n = a_n + ib_n$, $n = 1,2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|z_1\cdot z_2| &= |a_1a_2 + i^2\cdot b_1b_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2| \\
&= |a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)| \\
&= \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2} \\
&= \sqrt{a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1b_2b_1a_2 + b_1^2a_2^2} \\
&= \sqrt{a_1^2(a_2^2+b_2^2) + b_1^2(b_2^2+a_2^2)} \\
&= \sqrt{(a_1^2+b_1^2)\cdot(a_2^2+b_2^2)}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} = |z_1|\cdot|z_2|.$$

(4). Es genügt zu zeigen: $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, denn

$$\left|\frac{u}{z}\right| = \left|u\cdot\frac{1}{z}\right| = |u|\cdot\left|\frac{1}{z}\right| = |u|\cdot\frac{1}{|z|} = \frac{|u|}{|z|}.$$

Wir wissen schon, daß für $z = a+ib$ und $c := a^2+b^2$ gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{c} + i\,\frac{-b}{c} \quad\Longrightarrow$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

(5). Es sei $z_n = a_n + ib_n$, $n = 1,2$. Dann ist die linke Seite ls von (5):

$$ls := |a_1+ib_1+a_2+ib_2| = |a_1+a_2+i(b_1+b_2)| = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

und die rechte Seite rs ist:

$$rs := |a_1+ib_1|+|a_2+ib_2| = \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}.$$

Offenbar sind ls, $rs \geq 0$. Folglich ist

$$ls \leq rs \quad\Longleftrightarrow\quad ls^2 \leq rs^2 \quad\Longleftrightarrow$$

$$(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2 \leq (a_1^2+b_1^2) + 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} + (a_2^2+b_2^2) \quad\Longleftrightarrow$$

$$2(\underbrace{a_1a_2+b_1b_2}_{:=(\star)}) \leq 2\cdot\underbrace{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}_{:=(\star\star)}.$$

Ist $(\star) < 0$, dann gilt offenbar die letzte Ungleichung und damit $ls \leq rs$.
Es sei jetzt $(\star) \geq 0$. dann ist

$$(\star) \leq (\star\star) \quad\Longleftrightarrow\quad (\star)^2 \leq (\star\star)^2 \quad\Longleftrightarrow$$

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2 \leq (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \quad\Longleftrightarrow$$

$$a_1^2a_2^2+2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2 \leq a_1^2a_2^2+a_1^2b_2^2+b_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2 \quad\Longleftrightarrow$$

$$0 \leq (a_1b_2)^2 - 2a_1b_2b_1a_2 + (b_1a_2)^2 = (a_1b_2-b_1a_2)^2.$$

Damit gilt insgesamt $ls \leq rs$.

(6). Der Beweis hierzu erfolgt durch ähnliche Überlegungen. ❏

Bemerkung. Da die komplexen Zahlen einen Körper bilden, kann man mit ihnen entsprechend der Axiome I (1 – 10) rechnen (vgl. Kapitel 2, 2/1/1). Insbesondere lassen sich in $\mathbb{C}$ analog wie in $\mathbb{R}$ Folgen und Reihen bilden. Alle Definitionen und Sätze für Folgen und Reihen (mit reellen Zahlen), bei denen die Ordnung der Glieder **keine** Rolle spielt, gelten entsprechend auch für die komplexen Zahlen. Insbesondere hat man: **4/3/10**

Definition. (*Konvergenz*) **4/3/11**
Es sei $(z_n) = (a_n + ib_n)_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $z = a + ib$.
(z_n) konvergiert gegen z
$\overline{\overline{\mathrm{Df}}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|z_n - z| < \varepsilon$.

Bez.: $\lim z_n = z$ (oder $z_n \to z$).

Satz 4.18 *$(z_n) = (a_n + ib_n)$ konvergiert gegen $z = a + ib$ gdw $a_n \to a$ und $b_n \to b$.* **4/3/12**
(Konvergenz in $\mathbb{C}$ bedeutet also komponentenweise Konvergenz.)

Beweis. Es ist $|z_n - z| = |a_n + ib_n - (a+ib)| = |a_n - a + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + \underbrace{|i|}_{=1} \cdot |b_n - b|$. **4/3/13**

$(\longleftarrow)$ Wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Folglich ist

$$|z_n - z| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad z_n \to z.$$

$(\longrightarrow)$ $|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$ (für fast alle n) $\Longrightarrow$

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \quad \Longrightarrow$$

$$(a_n - a)^2,\ (b_n - b)^2 < \varepsilon^2 \quad \Longrightarrow$$

$$|a_n - a|,\ |b_n - b| < \varepsilon \quad \Longrightarrow$$

$$a_n \to a, \quad b_n \to b. \qquad \square$$

Bemerkung. Für Reihen mit komplexen Gliedern gelten insbesondere: **4/3/14**
– das Cauchysche Konvergenzkriterium und die daraus resultierenden Korollare;
– das Wurzel- und Quotientenkriterium;
– absolute Konvergenz zieht Konvergenz nach sich.
Nicht verwendbar (weil die Ordnung benutzt wird) sind das Leibnizkriterium und das Majorantenkriterium. (Das Majorantenkriterium läßt sich jedoch in manchen Fällen für die absolute Konvergenz nutzen, indem man z.B. eine konvergente Majorante von $\sum |z_n|$ zu finden versucht.)

4.4 Potenzreihen

Einen wichtigen Spezialfall für Reihen bilden die sog. Potenzreihen. **4/4/0**

Definition. (*Potenzreihe*) **4/4/1**
Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen und a, x seien ebenfalls reell oder komplex.
Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *Potenzreihe* in $x-a$ mit den *Koeffizienten* a_n.

Achtung: Der Bequemlichkeit halber verabreden wir für Potenzreihen **(und nur für Potenzreihen)**, daß stets $(x-a)^0 = 1$ ist, auch für $x = a$. **4/4/2**

Es erhebt sich die Frage: Für welche (reellen oder komplexen) Zahlen x ist die Potenzreihe $\sum a_n(x-a)^n$ für fixiertes a konvergent?

Beispiele.

1. Es sei $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a = 0$, also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. **4/4/3/1**
Diese Reihe konvergiert (nach dem Quotientenkriterium) für alle reellen oder komplexen x.

2. Sei $a_n = n$, $a = 0$, also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$. **4/4/3/2**
Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$ (man kann wieder das Quotientenkriterium benutzen). Der Fall $|x| = 1$ muß gesondert untersucht werden.
Offenbar ist aber $(n \cdot |x|)$ keine Nullfolge, folglich ist die Reihe für $|x| = 1$ divergent.

3. Sei $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a = 0$, also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cdot x^n$. **4/4/3/3**
Diese Reihe konvergiert für alle $|x| < 1$ und divergiert für alle $|x| > 1$. Für $x = 1$ erhält man die harmonische Reihe, die bekanntlich nicht konvergiert, und für $x = -1$ entsteht eine spezielle alternierende Reihe, die (nach dem Leibnizkriterium) konvergiert.
Für komplexe x mit $|x| = 1$ und $x \neq \pm 1$ müßten gesonderte Untersuchungen durchgeführt werden.

4. Sei $a_n = n^n$, $a = 0$, also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n$. **4/4/3/4**
Diese Reihe konvergiert nur für $x = 0$.

Bemerkung. Die Konvergenzgebiete der untersuchten Potenzreihen sind recht unterschiedlich. **4/4/4**

Die Reihe in dem ersten Beispiel konvergiert für alle Elemente in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$ (je nachdem, ob man nur reelle oder auch komplexe Zahlen zuläßt).
In dem zweiten Beispiel konvergiert die Reihe in dem offenen Intervall $(-1, 1)$ und divergiert außerhalb (im reellen Fall) bzw. sie konvergiert in der offenen Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$, und sie divergiert außerhalb (im komplexen Fall).
Das dritte Beispiel zeigt, daß es auf dem *Rand* des Konvergenzgebietes einer Potenzreihe (d.h. in den Endpunkten des Intervalls bzw. auf der Kreislinie) Punkte geben kann, wo die Reihen konvergieren bzw. divergieren.
Im vierten Beispiel ist eine Reihe gegeben, deren Konvergenzgebiet auf einen Punkt zusammenschrumpft.
In den betrachteten Beispielen, konvergieren die Potenzreihen stets innerhalb eines offenen Intervalls bzw. Kreises und sie divergieren außerhalb; auf dem Rande ist beides möglich. (Kreise bzw. Intervalle dürfen auch ausarten zu ganz $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ oder zu einem Punkt.)

Wir wollen jetzt untersuchen, ob dies für alle Potenzreihen immer der Fall ist. Dazu formulieren wir zunächst eine Definition.

Definition. (*Konvergenzradius*) **4/4/5**

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.
ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_n(x-a)^n$
$\underset{\text{Df}}{\equiv}$ Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.
(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

Wir werden nun zeigen, daß Potenzreihen tatsächlich immer innerhalb eines Intervalls bzw. Kreises konvergieren und außerhalb divergieren (der Radius des Kreises erweist sich als Konvergenzradius). **4/4/6**

Bemerkung. Im folgenden betrachten wir Potenzreihen in $\mathbb{C}$. Wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ gelten die Resultate auch für $\mathbb{R}$, falls die Koeffizienten a_n und a in $\mathbb{R}$ liegen.

Satz 4.19 *Es seien* $a_n, a \in \mathbb{C}$. **4/4/7**

(1) *Ist* $\sum a_n(x-a)^n$ *an einer Stelle* $x = x_0$ *konvergent, dann ist* $\sum a_n(x-a)^n$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x-a| < |x_0 - a|$ *absolut konvergent.*

(2) *Ist* $\sum a_n(x-a)^n$ *an einer Stelle* $x = x_1$ *divergent, dann ist* $\sum a_n(x-a)^n$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x-a| > |x_1 - a|$ *divergent.*

Beweis. (1). Ist $x_0 = a$, dann existiert kein x mit $|x-a| < |x_0 - a|$. Damit ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. **4/4/8**
Es sei jetzt $x_0 \neq a$. Nach Voraussetzung ist die Reihe in x_0 konvergent. Folglich ist

$\left(a_n(x_0-a)^n\right)$ eine Nullfolge, und somit ist $|a_n(x_0-a)^n| \le 1$ für fast alle n.
Sei x jetzt beliebig aber fixiert mit der Eigenschaft $|x-a| < |x_0-a|$. Dann gilt

$$0 \le \frac{|x-a|}{|x_0-a|} := q < 1.$$

Hieraus konstruieren wir eine konvergente Majorante für $\sum |a_n(x-a)^n|$. Es ist

$$|a_n(x-a)^n| = \left|a_n \cdot \frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n} \cdot (x_0-a)^n\right| =$$

$$\underbrace{\left|a_n(x_0-a)^n\right|}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left|\frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n}\right|}_{=q^n} \le q^n \quad \text{und} \quad 0 \le q < 1.$$

$\sum q^n$ ist als geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergent, folglich ist $\sum q^n$ eine konvergente Majorante von $\sum |a_n(x-a)^n|$. Daher ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent für x.

(2). Sei $|x-a| > |x_1-a|$ und $\sum a_n(x_1-a)^n$ divergent. Wäre $\sum a_n(x-a)^n$ konvergent, dann wäre $\sum a_n(x_1-a)^n$ nach (1) absolut konvergent. ↯! ❏

4/4/9

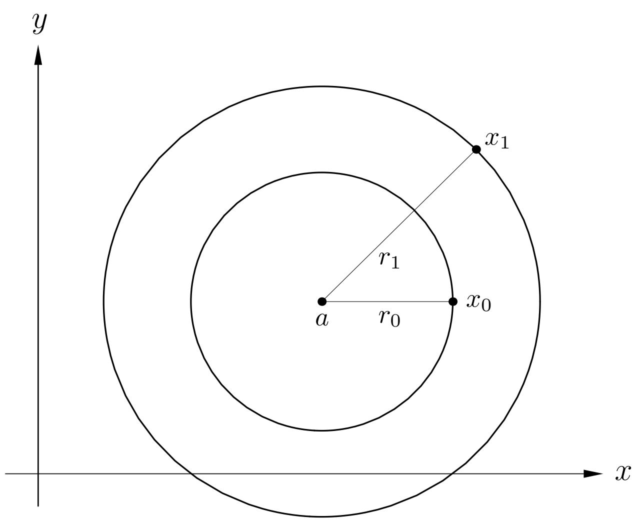

Abb. 4.2 In dem Kreis $\{x : |x-a| < r_0\}$ ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent, und für alle x mit der Eigenschaft $|x-a| > r_1$ ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

Satz 4.20 *Jede Potenzreihe besitzt einen Konvergenzradius ϱ, der auch 0 oder ∞ sein kann.* **4/4/10**

Beweis. Sei $\sum a_n(x-a)^n$ eine beliebige Potenzreihe. **4/4/11**

1. Fall: Die Reihe konvergiert nur für $x = a$. Dann ist $\varrho = 0$.
2. Fall: Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Reihe absolut für alle x (nach Satz 4.19). Folglich ist $\varrho = \infty$.
3. Fall: $\sum a_n(x-a)^n$ konvergiert für ein $x_0 \neq a$ und divergiert für ein x_1 (vgl. Abb. 4.2).

Es sei

$M = \{r \in \mathbb{R} :$ es gibt ein $x \in \mathbb{C}$, so daß $|x-a| = r$ und $\sum a_n(x-a)^n$ konvergiert $\}$.

Dann ist $M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$.
Es sei $r_1 = |x_1 - a|$. Nach Voraussetzung ist $\sum a_n(x_1-a)^n$ divergent. Folglich gilt (nach Satz 4.19(2)): Wenn $r' > r_1$, so ist $r' \notin M$. Dann ist M nach oben beschränkt (z.B. durch r_1), besitzt also ein Supremum; es sei $\varrho := \sup M$.

Behauptung: ϱ ist der Konvergenzradius von $\sum a_n(x-a)^n$.

z.z.: 1. Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent.
 2. Wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

Zu 1. Sei $|x-a| < \varrho$.
Dann existiert (nach Definition des Supremums) ein $r' \in \mathbb{R}$, so daß $|x-a| < r' \leq \varrho$ und $r' \in M$. Nach Definition von M existiert ein $x' \in \mathbb{C}$, so daß $|x'-a| = r'$ und $\sum a_n(x'-a)^n$ konvergiert.
Wegen $|x-a| < r' = |x'-a|$ ist dann (nach Satz 4.19(1)) $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent.

Zu 2. Sei $|x-a| > \varrho$. Wäre $\sum a_n(x-a)^n$ konvergent, so wäre $r = |x-a| \in M$ und $r > \varrho$, folglich wäre ϱ nicht $\sup M$. N! ❑

Bemerkung. Die offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit dem Mittelpunkt a und dem Radius ϱ (bzw. das offene Intervall in $\mathbb{R}$ mit dem Mittelpunkt a und der Länge 2ϱ) heißt *Konvergenzgebiet* oder *Konvergenzkreis* (bzw. *Konvergenzintervall*) und a heißt *Mittelpunkt der Potenzreihe* $\sum a_n(x-a)^n$. **4/4/12**

Innerhalb dieser offenen Kreisscheibe (bzw. des offenen Intervalls) konvergiert die Potenzreihe absolut, außerhalb divergiert sie; auf dem Rande kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (man betrachte das Beispiel $\sum \frac{x^n}{n}$ für $x = \pm 1$).

Satz 4.21 *Es sei $\sum a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ϱ, und es sei $l = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:* **4/4/13**

(1) *Wenn $0 < l < \infty$, so $\varrho = \frac{1}{l}$.*

(2) *Wenn $l = 0$, so $\varrho = \infty$.*

(3) *Wenn $l = \infty$, so $\varrho = 0$.*

Beweis. Übungsaufgabe! ❑ **4/4/14**

Bemerkung. Da einer der drei Fälle immer auftritt, kann man auf diese Weise den Konvergenzradius bestimmen. Zur Übung untersuche man noch einmal die letzten Beispiele 1. – 4. Existieren $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ oder haben sie den uneigentlichen Grenzwert ∞, dann ist $l = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $l = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ (in Satz 4.21). Dies kann bei der Bestimmung des Konvergenzradius genutzt werden. **4/4/15**

4.5 Rechnen mit Potenzreihen

Satz 4.22 (*Summe von Potenzreihen*) **4/5/0**
Es seien $\sum a_n(x-a)^n$ *und* $\sum b_n(x-a)^n$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* ϱ_1 *bzw.* ϱ_2 *und* α, β *seien reelle oder komplexe Zahlen. Dann gilt:*

(1) *Die Potenzreihe* $\sum(\alpha{\cdot}a_n + \beta{\cdot}b_n)\cdot(x-a)^n$ *hat einen Konvergenzradius* $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

(2) *Für* $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ *ist*
$\sum(\alpha{\cdot}a_n + \beta{\cdot}b_n)\cdot(x-a)^n = \alpha\cdot\sum a_n(x-a)^n + \beta\cdot\sum b_n(x-a)^n.$

Beweis. Der Beweis erfolgt sehr leicht mit Hilfe der Sätze über Folgen (von Partialsummen) und über Reihen. ❑ **4/5/1**

Satz 4.23 (*Produkt von Potenzreihen*) **4/5/2**
Es seien $\sum a_n(x-a)^n$ *und* $\sum b_n(x-a)^n$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* ϱ_1 *bzw.* ϱ_2, *und es sei* $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j \ \Big(= \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\Big)$. *Dann gilt:*

(1) *Die Potenzreihe* $\sum c_n(x-a)^n$ *hat einen Konvergenzradius* $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

(2) *Für* $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ *ist*
$\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\Big)\cdot\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n\Big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$

Beweis. Für $|x-a| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ konvergieren beide Potenzreihen absolut; folglich läßt sich ihr Cauchyprodukt bilden (vgl. Satz 4.14), das auch wenigstens dort absolut konvergiert. Also $\varrho \geq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ und **4/5/3**

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x-a)^\nu\cdot b_{n-\nu}(x-a)^{n-\nu}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\cdot(x-a)^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^n\cdot\underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}}_{=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Für $|x-a| < \min\{\varrho_1,\ \varrho_2\}$ konvergiert $\sum c_n(x-a)^n$ absolut (vgl. Satz 4.14). ❑

Satz 4.24 (*Umordnen von Potenzreihen*) **4/5/4**

Voraussetzungen:

(1) *Es sei* $\sum a_n(x-a)^n$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $\varrho > 0$.

(2) *Weiterhin sei* $b \neq a$, $|b-a| < \varrho$ *und* $\varrho - |b-a| = \varrho'\,(> 0)$.

Behauptung:

Es gibt eine Potenzreihe $\sum b_n(x-b)^n$ *mit einem Konvergenzradius* $\geq \varrho'$, *so daß für jedes* x *mit* $|x-b| < \varrho'$ *gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n, \quad \textit{wobei} \quad b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n}(b-a)^{m-n}.$$

(**Bez.:** $\sum b_n(x-b)^n$ entsteht aus $\sum a_n(x-a)^n$ durch Umordnung nach Potenzen von $(x-b)$.)

Beweis. Zum Beweis benutzen wir das Korollar zum Großen Umordnungssatz. **4/5/5**

Für alle x mit $|x-a| < \varrho$ gilt stets

$$\begin{aligned} a_n(x-a)^n &= a_n\Big((x-b)+(b-a)\Big)^n \\ &= \sum_{m=0}^{n} \underbrace{a_n\binom{n}{m}(x-b)^m(b-a)^{n-m}}_{:=\,a_{nm}} \\ &= \sum_{m=0}^{n} a_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}. \qquad \Big(\text{wegen } \tbinom{n}{m} = 0 \text{ für } m > n\Big) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| = \sum_{m=0}^{n} |a_{nm}| &= |a_n|\cdot \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}|x-b|^m|b-a|^{n-m} \\ &= |a_n|\cdot\Big(|x-b|+|b-a|\Big)^n := \alpha_n. \end{aligned}$$

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzgebietes absolut konvergieren und nach Voraussetzung stets $|x-b|+|b-a| < \varrho$ ist, konvergiert $\sum \alpha_n$ absolut. Damit sind die Voraussetzungen für das Korollar erfüllt. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big((x-b)+(b-a)\Big)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_n\binom{n}{m}(x-b)^m(b-a)^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\binom{n}{m}(x-b)^m(b-a)^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\binom{n}{m}(x-b)^m(b-a)^{n-m} \qquad \text{(nach dem Korollar)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (b-a)^{n-m} \Big) (x-b)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=m}^{\infty} \underbrace{a_n \binom{n}{m} (b-a)^{n-m}}_{=c_n} \Big) (x-b)^m; \quad (\tbinom{n}{m} = 0 \ \text{für} \ n < m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n. \qquad ❏$$

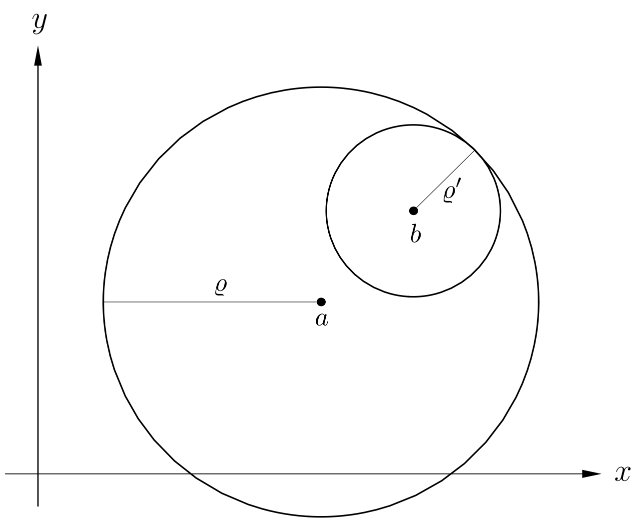

Abb. 4.3 Umordnung einer Potenzreihe $\sum a_n(x-a)^n$ nach Potenzen von $(x-b)$. Die Ausgangsreihe konvergiert innerhalb des größeren Kreises. Zumindest in dem kleineren Kreis $\{x : |x-b| < \varrho'\}$ ist die umgeordnete Reihe $\sum b_n(x-b)^n$ absolut konvergent.

Satz 4.25 (*Identitätssatz für Potenzreihen*) **4/5/6**

Voraussetzungen:

(1) *Es seien* $\sum a_n(x-a)^n$ *und* $\sum b_n(x-a)^n$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* ϱ_1 *bzw.* ϱ_2 *und* $\varrho_1, \varrho_2 > 0$.

(2) (x_ν) *sei eine Folge mit* $x_\nu \neq a$, $\lim x_\nu = a$ *und* $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$.

(3) *Für jedes* $\nu \in \mathbb{N}$ *gilt*: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n$.

Behauptung: *Für jedes* n *ist* $a_n = b_n$.

(D.h., stimmen zwei Potenzreihen in unendlich vielen Punkten x_ν überein und ist der Mittelpunkt a der Potenzreihen wenigstens ein Häufungspunkt dieser Menge, dann stimmen die Reihen schon koeffizientenweise überein, sie sind also identisch.)

Beweis. **4/5/7/1**

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zunächst einen Hilfssatz.

Lemma. *Es sei* $\sum c_n(x-a)^n$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $\varrho > 0$, **4/5/7/2**

und sei (x_ν) *eine Folge mit* $x_\nu \neq a$, $|x_\nu - a| < \varrho$ *und* $\lim x_\nu = a$.
Dann ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $|x_\nu - a| < \varrho$. Wegen $x_\nu \to a$ existiert ein n_0, **4/5/7/3**
so daß für alle $\nu \geq n_0$ gilt: $|x_\nu - a| < \dfrac{\varrho}{2} < \varrho$.
Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergieren, ist
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|c_n\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n\right|$ konvergent. Damit ist offenbar auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|c_n\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n-1}\right|$ konvergent.
Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|c_n\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n-1}\right| < c$.
Für $\varepsilon > 0$ existiert ein m_0, so daß für alle $\nu \geq m_0$ gilt: $|x_\nu - a| < \dfrac{\varepsilon}{c}$.
Ist $k_0 = \max\{m_0, n_0\}$ und $\nu \geq k_0$, dann ist

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n - c_0\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |(x_\nu - a)^n| =$$

$$|x_\nu - a| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \underbrace{|x_\nu - a|}_{<\frac{\varrho}{2}}{}^{n-1} \leq |x_\nu - a| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n-1}}_{<c} < c \cdot \underbrace{|x_\nu - a|}_{<\frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon.$$

Also

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0. \qquad ❏$$

Wir setzen nun den Beweis von Satz 4.25 fort. **4/5/7/4**

Es sei $c_n = a_n - b_n$.
g.z.z.: $c_n = 0$ für jedes n.
Für alle x_ν mit $|x_\nu - a| < \varrho_1, \varrho_2$ gilt nach Voraussetzung:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_\nu - a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_\nu - a)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n) \cdot (x_\nu - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n.$$

Wir zeigen jetzt induktiv, daß $c_n = 0$ für alle n.
1. $n = 0$.
Es ist $0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n \implies 0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x_\nu - a)^n = c_0$.
2. Es gelte schon $c_0 = \cdots = c_k = 0$.
3. Behauptung: $c_{k+1} = 0$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n &= \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (x_\nu - a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_\nu - a)^{n+k+1} \\
&= (x_\nu - a)^{k+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_\nu - a)^n .
\end{aligned}
$$

Aus $x_\nu - a \neq 0$ folgt

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k+1} (x_\nu - a)^n .$$

Analog wie für $n = 0$ gilt hier auch $c_{0+k+1} = c_{k+1} = 0$. ❏

Bemerkung. Als Folgerung erhält man sofort: Stimmen zwei Potenzreihen in einem **4/5/8**
„kleinen Intervall“ überein, dann sind sie schon identisch.
Es sei hier ein Ausblick auf eine spätere wichtige Anwendung des Lemmas gegeben.
Mit Potenzreihen lassen sich auf einfache Weise Funktionen definieren:
$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, wobei $f(x)$ dann im Konvergenzgebiet der Potenzreihe definiert ist.
Es gilt offenbar $f(a) = a_0$, und aus dem Lemma erhält man:
Wenn $x_\nu \to a$, so $f(x_\nu) \to f(a)$. Hieraus folgt, daß die Funktion wenigstens an der Stelle $x = a$ stetig ist (dieser Begriff ist natürlich noch zu definieren). Aus der Stetigkeit an einer Stelle folgt bei einigen wichtigen Funktionen schon die Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich (z.B. für die Sinusfunktion und die Exponentialfunktion, mit deren Hilfe sich weitere elementare Funktionen definieren lassen).

In den späteren Kapiteln werden wir uns noch ausführlicher mit weiteren Eigenschaften von Funktionenfolgen und -reihen befassen, insbesondere werden wir Untersuchungen zur Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger konvergenz vornehmen.

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 4

- Definitionen: Reihe, Konvergenz, absolute Konvergenz; **4/6/1**
- Satz 4.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium) und Korollare 1, 2, 3; **4/6/2**
- Satz 4.3: Absolut konvergente Reihen sind konvergent; **4/6/3**
- Satz 4.4 (Summen von Reihen); **4/6/4**
- Definition: alternierende Reihe; **4/6/5**
- Satz 4.6 (Leibniz-Kriterium); **4/6/6**
- Beispiele von konvergenten und divergenten Reihen, insbesondere geometrische und harmonische Reihe; **4/6/7**
- Definition: Majorante, Minorante; **4/6/8**
- Sätze 4.8, 4.9, 4.10 (Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium); **4/6/9**
- Definition: unbedingte Konvergenz; **4/6/10**
- Satz 4.12: Absolut konvergente Reihen konvergieren unbedingt; **4/6/11**
- Satz 4.14 (Multiplikation unendlicher Reihen); **4/6/12**
- Cauchyprodukte; **4/6/13**
- komplexe Zahlen bilden einen Körper, Betrag von komplexen Zahlen; **4/6/14**
- Definition: Potenzreihen, Konvergenzradius; **4/6/15**
- Satz 4.20 (Potenzreihen besitzen einen Konvergenzradius, anschauliche Erläuterung); **4/6/16**
- Berechnung des Konvergenzradius; **4/6/17**
- Sätze 4.22, 4.23 (Summe bzw. Produkt von Potenzreihen); **4/6/18**
- Satz 4.25 (Identitätssatz für Potenzreihen) + Lemma. **4/6/19**