Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Beispiele.

Wir betrachten Funktionen f, g, h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **5/1/9/1**
Der Einfachheit wegen bezeichnen wir in Zukunft die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ auch mit $[a, \infty)$; analog benutzen wir die Bezeichnungen (a, ∞), $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$.

1. Sei $f(x) = x^2$ mit $A := D(f) = \mathbb{R} \implies W(f) = f(A) = [0, \infty)$ (vgl. Abb. 5.4).
2. Sei $g(x) = \sqrt{x}$ mit $A := D(g) = [0, \infty) \implies W(g) = g(A) = [0, \infty)$ **5/1/9/2** (vgl. Abb. 5.5).

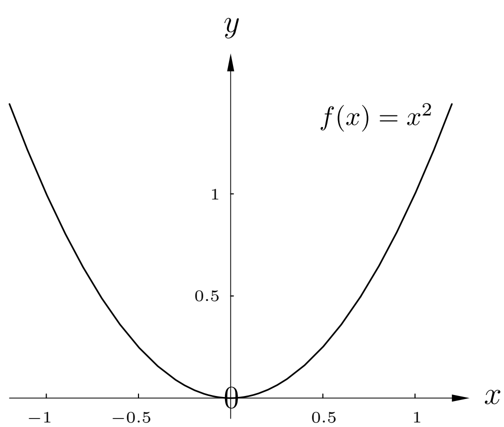

Abb. 5.4 – Parabel

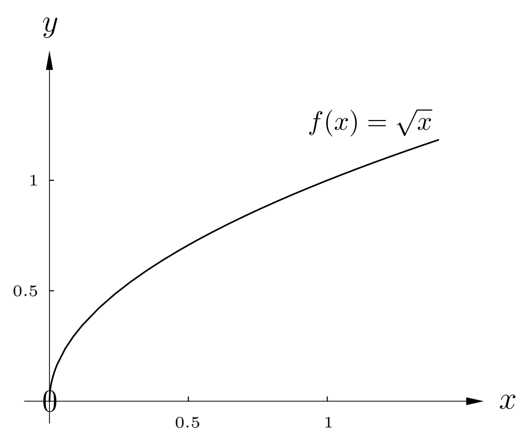

Abb. 5.5 – Wurzelfunktion

3. Offenbar ist die Funktion f im Beispiel 1 nicht injektiv. Schränkt man jedoch den **5/1/9/3** Definitionsbereich von f auf $[0, \infty)$ ein (so erhält man eigentlich eine andere Funktion, die wir aber weiterhin mit f bezeichnen werden), dann ist f injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1}.

Für $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$ ist

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}.$$

Löst man die Gleichung $y = x^2 = f(x)$ nach x auf, so erhält man $x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$, wobei $y \geq 0$.
Will man die Graphen der Funktionen f und f^{-1} mit Hilfe des gleichen (rechtwinkligen) Koordinatensystems veranschaulichen, dann muß man x und y in $y = x^2$ vertauschen und entsprechend nach y auflösen. Dadurch erhält man $y = \sqrt{x}$.
$f^{-1}(x)$ erweist sich dann als Spiegelung von $f(x)$ an der Geraden $y = x$ $(= I(x))$.

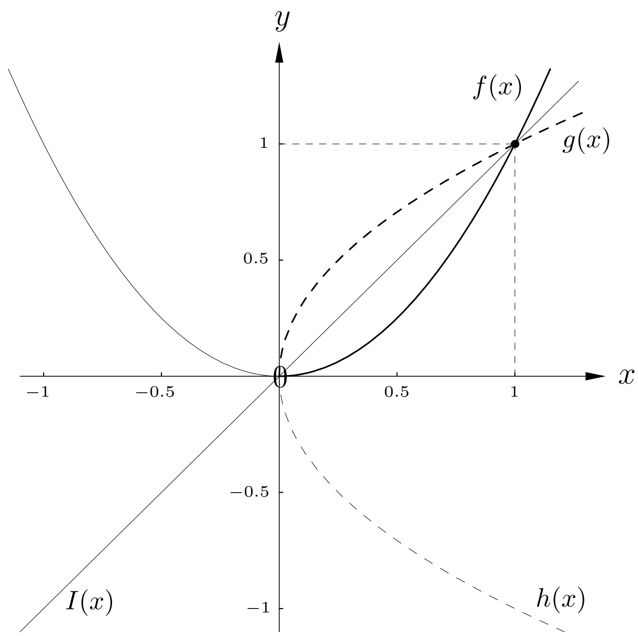

Abb. 5.6 Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ für $0 \leq x$ (Graph dick durchgezogen) ist durch $g(x) = \sqrt{x}$ gegeben (Graph dick gestrichelt). Offenbar ist $f(x)$ auch für $x \leq 0$ injektiv (Graph dünn durchgezogen); die entsprechende Umkehrfunktion ist durch $h(x) = -\sqrt{x}$ gekennzeichnet (Graph dünn gestrichelt). Funktionen und ihre Umkehrfunktionen sind jeweils an der Identitätsfunktion $I(x) = x$ gespiegelt.