Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Beispiele.

3. Es sei $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig. **5/2/4/3**
Um die Stetigkeit von $f(x)$ in a nachweisen zu können, haben wir (entsprechend der Definition) für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Es ist

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a| \cdot |x - a| := (\star)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Erste Näherung für δ: $0 < \delta \leq 1$.
Dann ist $|x + a| = |x - a + 2a| \leq \underbrace{|x - a|}_{<\delta\leq 1} + |2a| \leq 1 + |2a|$.

Folglich ist

$$|f(x) - f(a)| = (\star) \leq |x + a| \cdot |x - a| \leq (1 + |2a|) \cdot |x - a|.$$

Wählt man jetzt $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{1 + |2a|}$, dann ist für $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.