

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Beispiele.

1. $f(x) = c$, $D(f) = \mathbb{R}$. (vgl. Abb. 5.9)

5/2/4/1

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Konstante Funktionen sind also stetig.

2. $f(x) = x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. (vgl. Abb. 5.10)

5/2/4/2

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wir wählen wieder $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Folglich ist auch die Identitätsfunktion stetig.

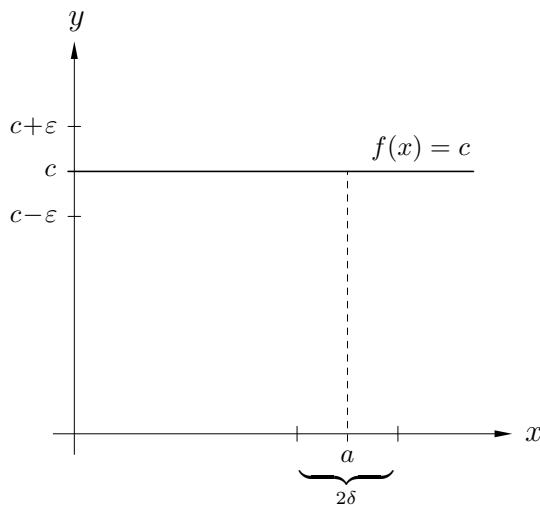


Abb. 5.9 – Konstante Funktion

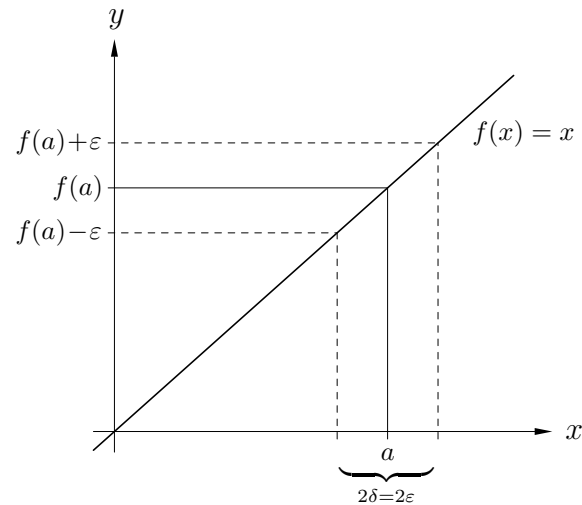


Abb. 5.10 – Identitätsfunktion

3. Es sei $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

5/2/4/3

Um die Stetigkeit von $f(x)$ in a nachweisen zu können, haben wir (entsprechend der Definition) für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Es ist

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a| \cdot |x - a| := (\star)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Erste Näherung für δ : $0 < \delta \leq 1$.

$$\text{Dann ist } |x + a| = |x - a + 2a| \leq \underbrace{|x - a|}_{< \delta \leq 1} + |2a| \leq 1 + |2a|.$$

Folglich ist

$$|f(x) - f(a)| = (\star) \leq |x + a| \cdot |x - a| \leq (1 + |2a|) \cdot |x - a|.$$

Wählt man jetzt $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + |2a|}$, dann ist für $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4. $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist in $a = 1$ nicht stetig, da f an der Stelle a nicht definiert ist. 5/2/4/4

5. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.11) 5/2/4/5

Behauptung: f ist in $a = 0$ nicht stetig.

Stetigkeit in $a = 0$ formal ausgedrückt bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Folglich bedeutet Unstetigkeit an dieser Stelle:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D(f) (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon).$$

Es sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig.

Ist $x \in U_\delta(0)$ mit $-\delta < x < 0$, dann ist $|f(x) - f(0)| = |-1 - 1| = 2 \geq \varepsilon = 1$.

Hieraus folgt die Behauptung.

6. Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$ (vgl. Abb. 5.12) 5/2/4/6

f ist in keinem Punkt des Definitionsbereiches stetig, denn in jeder δ -Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ liegen rationale und irrationale Zahlen. Wählt man z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta > 0$ beliebig, dann liegt wenigstens ein Funktionswert $f(x)$ mit $x \in U_\delta(a)$ und x rational bzw. irrational außerhalb von $U_\varepsilon(f(a))$.

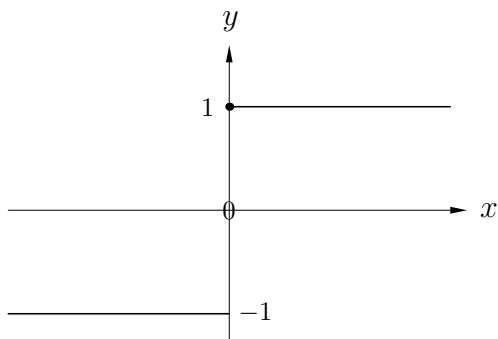


Abb. 5.11

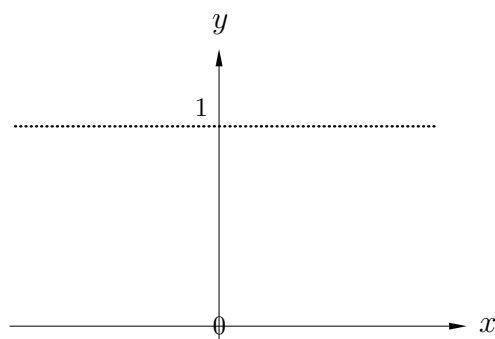


Abb. 5.12