

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

#### Beispiele.

1. Es sei  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

5/2/11/1

$f$  ist in  $a = 1$  nicht definiert (also auch nicht stetig), aber  $f$  besitzt in  $a = 1$  einen Grenzwert, nämlich  $c = 2$ . Dazu betrachten wir für  $x \neq 1$

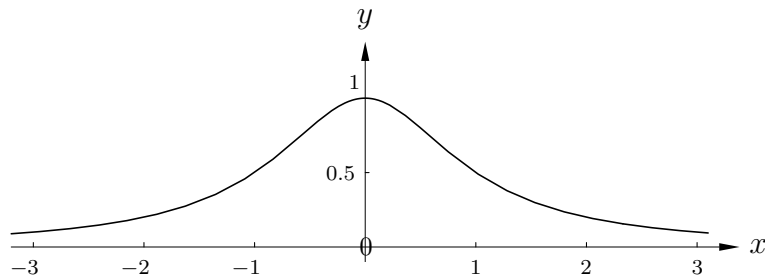
$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} - 2 \right| \\ &= |(x + 1) - 2| = |x - 1| := (\star). \end{aligned}$$

Ist  $\varepsilon > 0$  und wählt man  $\delta = \varepsilon$ , dann erhält man für  $|x - 1| < \delta$ :  
 $|f(x) - 2| = |x - 1| = (\star) < \varepsilon$ .

2. Sei  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

5/2/11/2

Behauptung:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$



Sei  $\varepsilon > 0$  und  $x \geq 1$ . Dann gilt

Abb. 5.14

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x^2 + 1} - 0 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} := (\star).$$

Für alle  $x > \frac{1}{\varepsilon}$  ist  $|f(x) - 0| \leq (\star) = \frac{1}{x} < \varepsilon$ .