

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.3 (Folgenstetigkeit)

5/2/14

Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:

f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis. (\rightarrow) Sei f in a stetig. Nach Definition erhält man:

5/2/15

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist $|x_n - a| < \delta$ für fast alle n , und somit gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für fast alle n .

Also $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

(\leftarrow) Annahme, f ist in a nicht stetig.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D(f)$ existiert mit $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Wählt man $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, dann gibt es für jedes n ein $x_n \in D(f)$ mit

$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$, also

$x_n \rightarrow a$ aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$,

d.h., $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ **M!** \square