

## Kapitel 5 Reelle Funktionen

### 5.2 Stetigkeit

**Satz 5.5** (*Stetigkeit der Verkettung*)

5/2/19

Seien  $f, g$  Funktionen mit  $W(g) \subseteq D(f)$ .

Ist  $g$  in  $a$  stetig und  $f$  in  $g(a)$  stetig, dann ist  $f \circ g$  in  $a$  stetig.

**Beweis.** Nach Definition der Stetigkeit ist  $g$  in  $a$  und  $f$  in  $g(a)$  definiert, folglich 5/2/20  
ist  $a \in D(f \circ g)$ .

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D(f \circ g)$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Dann ist  $g$  in  $x_n$  definiert, und wegen  $W(g) \subseteq D(f)$  ist  $f$  in  $g(x_n)$  definiert.

Aus der Stetigkeit von  $g$  in  $a$  folgt:  $g(x_n) \rightarrow g(a)$ .

Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $g(a)$  stetig. Dann gilt für jede Folge  $(y_n)$  in  $D(f)$ :

Wenn  $y_n \rightarrow g(a)$ , so  $f(y_n) \rightarrow f(g(a))$ .

Speziell für  $y_n = g(x_n)$  gilt dann

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(y_n) \longrightarrow f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Nach Satz 5.3 ist also  $f \circ g$  in  $a$  stetig.  $\square$