Kapitel 5
Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.6 (*Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz von Bolzano*) **5/2/21**
Ist f *in dem abgeschlossenen Intervall* $[a,b]$ *stetig und* $f(a) < 0 < f(b)$ *oder* $f(a) > 0 > f(b)$ (d.h., $f(a) \cdot f(b) < 0$), *dann gibt es ein* $c \in (a,b)$, *so daß* $f(c) = 0$.

Beweis. Es sei o.B.d.A. $f(a) < 0 < f(b)$ (sonst wird $-f(a) < 0 < -f(b)$ betrachtet). **5/2/22**

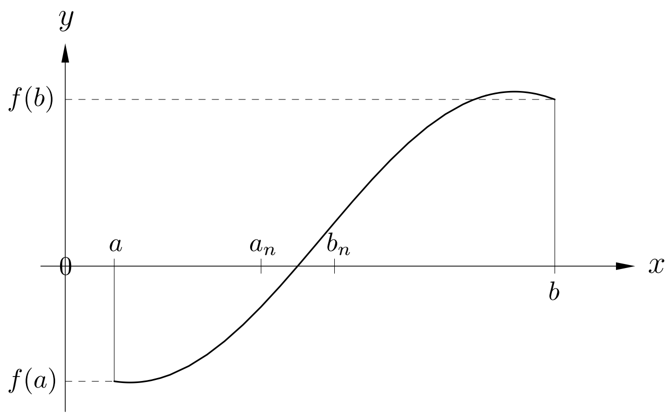

Abb. 5.15 Ist c_{n+1} der Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$, dann wird entsprechend der Bedingung $f(c_{n+1}) < 0$ bzw. $f(c_{n+1}) \geq 0$ das linke bzw. das rechte Teilintervall als $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gewählt.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, so daß

$$f(a_n) < 0 \leq f(b_n) \quad \text{und} \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Sei $a_0 := a$, $b_0 := b \implies f(a) < 0 \leq f(b)$.
Für n sei $[a_n, b_n]$ schon definiert (mit den geforderten Eigenschaften).
Sei $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$; dann definieren wir

$$a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_{n+1}, \quad \text{falls } f(c_{n+1}) \geq 0 \quad \text{und}$$
$$a_{n+1} = c_{n+1},\ b_{n+1} = b_n, \quad \text{falls } f(c_{n+1}) < 0.$$

Offenbar ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt und (b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt. Folglich existieren $\lim a_n$ und $\lim b_n$, und wegen $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ ist $\lim a_n = \lim b_n$.
Nach dem Intervallschachtelungsaxiom existiert ein c mit $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n.
$\implies \lim a_n = c = \lim b_n$.
Nach Voraussetzung ist $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ für alle n. Da f in c stetig ist, gilt:

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$$

Daraus folgt also $f(c) = 0$. ❑