

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.8 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f^{-1} in $[\alpha, \beta]$ stetig, wobei $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ und $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$. 5/2/27

Beweis. Nach Satz 5.7 ist f in $[a, b]$ streng monoton. 5/2/28

Sei o.B.d.A. f in $[a, b]$ streng monoton wachsend und $\alpha := f(a)$, $\beta := f(b)$ (für „fallend“ verläuft der Beweis analog).

Dann ist $f(a) < f(b)$, und nach dem Zwischenwertsatz werden alle Werte d mit $f(a) < d < f(b)$ durch f angenommen, also $f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [\alpha, \beta]$.

Sei $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Wir haben zu zeigen, daß f^{-1} in γ stetig ist.

Dazu sei (y_n) eine Folge mit $y_n \in [\alpha, \beta]$ und $y_n \rightarrow \gamma$.

Wegen $y_n, \gamma \in [\alpha, \beta] = f([a, b])$ existieren $x_n, c \in [a, b]$, so daß $f(x_n) = y_n$ und $f(c) = \gamma$. Damit ist (x_n) eine beschränkte Folge in $[a, b]$. Folglich besitzt (x_n) einen Häufungspunkt c_0 und eine gegen c_0 konvergierende Teilfolge $(x_{n_i}) : x_{n_i} \rightarrow c_0$. Da $[a, b]$ abgeschlossen ist, gehört c_0 zu $[a, b]$. Aus der Stetigkeit von f in $[a, b]$ folgt somit $f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$.

Da $y_n \rightarrow \gamma$ und (y_{n_i}) eine Teilfolge von (y_n) ist, gilt auch $y_{n_i} \rightarrow \gamma$. Also $y_{n_i} \rightarrow \gamma$ und $y_{n_i} = f(x_{n_i}) \longrightarrow f(c_0)$, folglich ist

$$f(c) = \gamma = f(c_0).$$

Gäbe es einen weiteren Häufungspunkt c' von (x_n) , so gäbe es eine Teilfolge (x'_{n_i}) von (x_n) mit $x'_{n_i} \rightarrow c'$.

Analog wie im vorhergehenden Teil des Beweises existiert eine Teilfolge (y'_{n_i}) von (y_n) mit $y'_{n_i} = f(x'_{n_i}) \longrightarrow f(c')$. Wegen $y'_{n_i} \rightarrow \gamma$ gilt dann auch

$$f(c') = \gamma = f(c).$$

Aus der Injektivität von f folgt schließlich $c' = c_0 = c$. Die beschränkte Folge (x_n) besitzt also genau einen Häufungspunkt, und dieser ist c , also $x_n \rightarrow c$.

Nach Voraussetzung gilt: $y_n \rightarrow \gamma$. Folglich ist

$$f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(x_n)) = x_n \longrightarrow c = f^{-1}(f(c)) = f^{-1}(\gamma),$$

d.h., f ist an der Stelle γ stetig. □